Principio da Casa dos Pombos

Principio da Casa dos Pombos

Se existem k casas e mais de k pombos, então pelo menos dois pombos devem ocupar a mesma casa

Principio da Casa dos Pombos

Se existem k casas e mais de k pombos, então pelo menos dois pombos devem ocupar a mesma casa

Aplicações diretas:

Principio da Casa dos Pombos

Se existem k casas e mais de k pombos, então pelo menos dois pombos devem ocupar a mesma casa

Aplicações diretas:

- Num conjunto de 3 pessoas, existem (pelo menos) 2 do mesmo genero

Principio da Casa dos Pombos

Se existem k casas e mais de k pombos, então pelo menos dois pombos devem ocupar a mesma casa

Aplicações diretas:

- Num conjunto de 3 pessoas, existem (pelo menos) 2 do mesmo genero
- Considere a nota da P1 arrendondada para um número inteiro de 0 a 10. Como temos 16 alunos, existem 2 com a mesma nota

Principio da Casa dos Pombos

Princípio muito simples mas com muitas aplicações não triviais
(Já utilizamos para provar: numa festa com 6 pessoas, ou 3 sao amigos comuns, ou 3 não se conhecem)

Principio da Casa dos Pombos

Princípio muito simples mas com muitas aplicações não triviais
(Já utilizamos para provar: numa festa com 6 pessoas, ou 3 sao amigos comuns, ou 3 não se conhecem)

Intuitivamente: Se tem muitos itens (pombos) e poucos “tipos” (casas), então pelo menos

dois itens/pombos tem mesmo tipo/casa

Principio da Casa dos Pombos

Princípio muito simples mas com muitas aplicações não triviais
(Já utilizamos para provar: numa festa com 6 pessoas, ou 3 sao amigos comuns, ou 3 não se conhecem)

Intuitivamente: Se tem muitos itens (pombos) e poucos "tipos" (casas), então pelo menos

dois itens/pombos tem mesmo tipo/casa

Podemos usar a frase anterior pra decidir numa aplicação quem deve ser "pompo" e quem deve ser "casa"

Principio da Casa dos Pombos

Proposição

Em uma festa com n pessoas, existem pelo menos duas pessoas tem o mesmo ***número*** *de conhecidos na festa*

Assuma que não há penetras: toda pessoa conhece pelo menos uma outra

Proposição

*Em uma festa com n pessoas, existem pelo menos duas pessoas tem o mesmo **número** de conhecidos na festa*

Assuma que não há penetras: toda pessoa conhece pelo menos uma outra

Pombos = pessoas, Casas = número de pessoas conhecidas

Principio da Casa dos Pombos

Proposição

Em uma festa com n pessoas, existem pelo menos duas pessoas tem o mesmo ***número*** *de conhecidos na festa*

Assuma que não há penetras: toda pessoa conhece pelo menos uma outra

Pombos = pessoas, Casas = número de pessoas conhecidas

Um pessoa pode conhecer entre 1 e $n-1$ pessoas $\Rightarrow$ temos $n-1$ "casas", uma pra cada possibilidade

Proposição

*Em uma festa com n pessoas, existem pelo menos duas pessoas tem o mesmo **número** de conhecidos na festa*

Assuma que não há penetras: toda pessoa conhece pelo menos uma outra

Pombos = pessoas, Casas = número de pessoas conhecidas

Um pessoa pode conhecer entre 1 e $n-1$ pessoas $\Rightarrow$ temos $n-1$ "casas", uma pra cada possibilidade

Como temos $n > n-1$ pessoas, pelo **princípio da casa dos pombos** 2 ficarão na mesma casa $\Rightarrow$ tem o mesmo número de conhecidos

Principio da Casa dos Pombos

Proposição

Qualquer conjunto com 51 números inteiros entre 1 e 100 contém 2 números consecutivos

Proposição

Qualquer conjunto com 51 números inteiros entre 1 e 100 contém 2 números consecutivos

Pergunta: Pombos/casas?

Principio da Casa dos Pombos

Proposição

Qualquer conjunto com 51 números inteiros entre 1 e 100 contém 2 números consecutivos

Pergunta: Pombos/casas?

Resposta: Pombos = números no conjunto, Casas = partição de 1,...,100 em 50 pares consecutivos $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, ...

Principio da Casa dos Pombos

Proposição

Qualquer conjunto com 51 números inteiros entre 1 e 100 contém 2 números consecutivos

Pergunta: Pombos/casas?

Resposta: Pombos = números no conjunto, Casas = partição de 1,...,100 em 50 pares consecutivos $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, ...

Ou seja, temos 50 casas, e 51 números no conjunto

Proposição

Qualquer conjunto com 51 números inteiros entre 1 e 100 contém 2 números consecutivos

Pergunta: Pombos/casas?

Resposta: Pombos = números no conjunto, Casas = partição de 1,...,100 em 50 pares consecutivos $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$, ...

Ou seja, temos 50 casas, e 51 números no conjunto

Pelo **princípio da casa dos pombos** 2 números ficam na mesma casa $\Rightarrow$ são consecutivos

Principio da Casa dos Pombos

Proposição

Mostre que sempre que colocamos 5 pontos dentro de um quadrado de lado 1, pelo menos dois pontos tem distancia menor ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Principio da Casa dos Pombos

Proposição

Mostre que sempre que colocamos 5 pontos dentro de um quadrado de lado 1, pelo menos dois pontos tem distancia menor ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pergunta: Pombos/casas?

Principio da Casa dos Pombos

Proposição

Mostre que sempre que colocamos 5 pontos dentro de um quadrado de lado 1, pelo menos dois pontos tem distancia menor ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

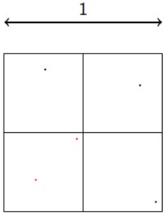
Pergunta: Pombos/casas?
Resposta: Pombos = pontos, Casas = ?

Proposição

Mostre que sempre que colocamos 5 pontos dentro de um quadrado de lado 1, pelo menos dois pontos tem distancia menor ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pergunta: Pombos/casas?
Resposta: Pombos = pontos, Casas = ?

Divida o quadrado em 4 subquadrados de lado 0.5 $\Rightarrow$ cada quadrado é uma casa



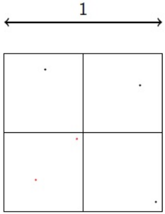
Proposição

Mostre que sempre que colocamos 5 pontos dentro de um quadrado de lado 1, pelo menos dois pontos tem distancia menor ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pergunta: Pombos/casas?
Resposta: Pombos = pontos, Casas = ?

Divida o quadrado em 4 subquadrados de lado 0.5 $\Rightarrow$ cada quadrado é uma casa

Como temos mais pontos que quadrados, pelo **princípio da casa dos pombos** um quadrado tem pelo menos 2 pontos

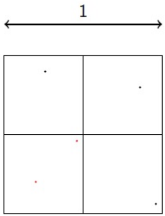


Proposição

Mostre que sempre que colocamos 5 pontos dentro de um quadrado de lado 1, pelo menos dois pontos tem distancia menor ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pergunta: Pombos/casas?
Resposta: Pombos = pontos, Casas = ?

Divida o quadrado em 4 subquadrados de lado 0.5 $\Rightarrow$ cada quadrado é uma casa



Como temos mais pontos que quadrados, pelo **princípio da casa dos pombos** um quadrado tem pelo menos 2 pontos

Esses 2 pontos no mesmo quadrado tem distancia no máximo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (no máximo a diagonal do quadrado)

Casa dos Pombos Generalizado

Se existem n pombos e k casas de pombos, então existe uma casa com pelo menos $\lceil n/k \rceil$ pombos

Casa dos Pombos Generalizado

Se existem n pombos e k casas de pombos, então existe uma casa com pelo menos $\lceil n/k \rceil$ pombos

Exemplo: Temos 10 pombos e 3 casas $\Rightarrow$ tem casa com $\lceil \frac{10}{3} \rceil = 4$ pombos
(se tivéssemos ≤ 3 pombos em cada casa, so poderíamos ter 9 pombos)

Princípio Generalizado

Exemplo

Qual é o número mínimo de pessoas que devemos ter para garantir que 4 delas nasceram no mesmo dia da semana

Princípio Generalizado

Exemplo

Qual é o número mínimo de pessoas que devemos ter para garantir que 4 delas nasceram no mesmo dia da semana

Pombos = pessoas, Casas = dias da semana

Princípio Generalizado

Exemplo

Qual é o número mínimo de pessoas que devemos ter para garantir que 4 delas nasceram no mesmo dia da semana

Pombos = pessoas, Casas = dias da semana

Como temos 7 casas, se temos n pessoas tem casa com $\lceil \frac{n}{7} \rceil$ pessoas

Princípio Generalizado

Exemplo

Qual é o número mínimo de pessoas que devemos ter para garantir que 4 delas nasceram no mesmo dia da semana

Pombos = pessoas, Casas = dias da semana

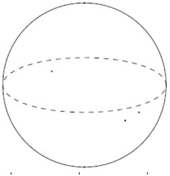
Como temos 7 casas, se temos n pessoas tem casa com $\lceil \frac{n}{7} \rceil$ pessoas

Basta $n = 22$ para ter $\lceil \frac{n}{7} \rceil = 4$ nessa casa

Desafio:

Proposição

Dados qualquer 5 pontos na esfera, existe uma semi-esfera fechada (e.g. hemisferio norte, incluindo equador) contendo 4 desses pontos



Inclusão-Exclusão

Inclusão-Exclusão: Expressar tamanho da união em termos dos conjuntos e suas interseções

Inclusão-Exclusão

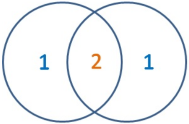
Inclusão-Exclusão: Expressar tamanho da união em termos dos conjuntos e suas interseções

Muito utilizado em problemas de contagem mais complicados

Inclusão-Exclusão: Expressar tamanho da união em termos dos conjuntos e suas interseções

Muito utilizado em problemas de contagem mais complicados

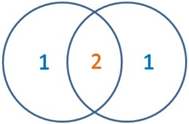
Com 2 conjuntos:



Inclusão-Exclusão: Expressar tamanho da união em termos dos conjuntos e suas interseções

Muito utilizado em problemas de contagem mais complicados

Com 2 conjuntos:

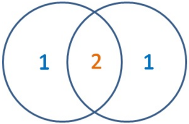


Inclusão-Exclusão: Expressar tamanho da união em termos dos conjuntos e suas interseções

Muito utilizado em problemas de contagem mais complicados

Com 2 conjuntos:

- Queremos contar $|U \cup V|$



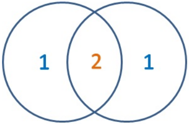
Inclusão-Exclusão: Expressar tamanho da união em termos dos conjuntos e suas interseções

Muito utilizado em problemas de contagem mais complicados

Com 2 conjuntos:

- Queremos contar $|U \cup V|$

- $|U| + |V|$ conta cada item da interseção duas vezes



Inclusão-Exclusão: Expressar tamanho da união em termos dos conjuntos e suas interseções

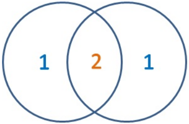
Muito utilizado em problemas de contagem mais complicados

Com 2 conjuntos:

- Queremos contar $|U \cup V|$

- $|U| + |V|$ conta cada item da interseção duas vezes

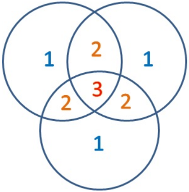
- Então $|U \cup V| = |U| + |V| - |U \cap V|$

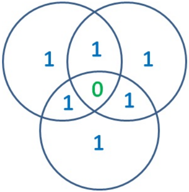


Inclusão-Exclusão

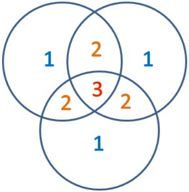
3 conjuntos:

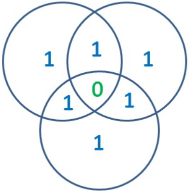
3 conjuntos:



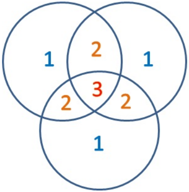


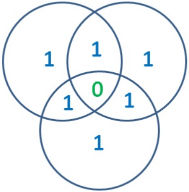
3 conjuntos:





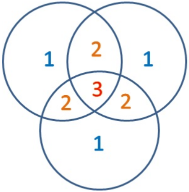
3 conjuntos:

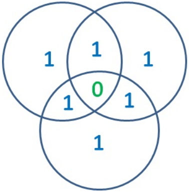




3 conjuntos:

- Queremos contar $|U \cup V \cup W|$

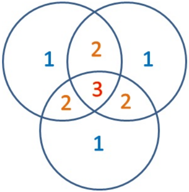


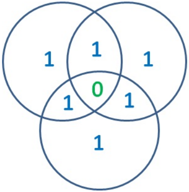


3 conjuntos:

- Queremos contar $|U \cup V \cup W|$

- $|U| + |V| + |W|$ conta itens da interseção múltiplas vezes



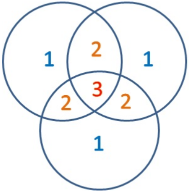


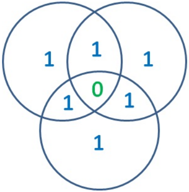
3 conjuntos:

- Queremos contar $|U \cup V \cup W|$

- $|U| + |V| + |W|$ conta itens da interseção múltiplas vezes

- Retirando interseções de cada par de conjuntos, $|U \cup V \cup W| - |U \cap V| - |U \cap W| - |V \cap W|$ faltou interseção dos 3 conjuntos





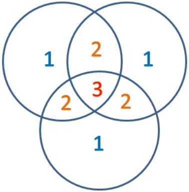
3 conjuntos:

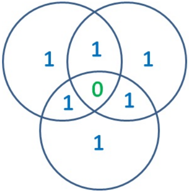
- Queremos contar $|U \cup V \cup W|$

- $|U| + |V| + |W|$ conta itens da interseção múltiplas vezes

- Retirando interseções de cada par de conjuntos, $|U \cup V \cup W| - |U \cap V| - |U \cap W| - |V \cap W|$ faltou interseção dos 3 conjuntos

- Então, $|U \cup V \cup W| - |U \cap V| - |U \cap W| - |V \cap W| + |U \cap V \cap W|$





Inclusão-Exclusão

Em geral: Se temos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, temos que

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = &\text{ soma tam. conjuntos} \\
&- \text{ soma tam. interseção de pares de conj.} \\
&+ \text{ soma tam. interseção de triplas de conj.} \\
&- \text{ soma tam. interseção de quadruplas de conj.} \\
&+ \ldots
\end{aligned}
$$

Exercicios

Exercício 1: Qualquer conjunto U de 10 inteiros entre 1 e 100 contém 2 subconjuntos com a mesma soma dos seus elementos

E.g. conjunto $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ tem subconjuntos $\{1, 2\}$ e $\{3\}$ com mesma soma dos elementos

Dica: Quantos subconjuntos temos, e quantas são suas possíveis somas?

Exercícios

Exercício 2:: Para qualquer 4 números escolhidos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, existem 2 deles que somam 7

Exercício 2:: Para qualquer 4 números escolhidos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, existem 2 deles que somam 7

Resposta: Pombos = números, Casas = duplas $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$

Exercícios

Exercício 2:: Para qualquer 4 números escolhidos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, existem 2 deles que somam 7

Resposta: Pombos = números, Casas = duplas $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$

Note que a soma dos dois elementos dessas duplas é 7

Exercício 2:: Para qualquer 4 números escolhidos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, existem 2 deles que somam 7

Resposta: Pombos = números, Casas = duplas $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$

Note que a soma dos dois elementos dessas duplas é 7

Como temos 4 números e 3 dessa duplas, 2 números estão na mesma "casa" $\Rightarrow$ sua soma é 7

Exercício: No elevador entram 6 pessoas. De quantas maneiras elas podem saltar nos andares 2, 3 e 4, de modo que pelo menos uma pessoa salte em cada andar?

Exercício: No elevador entram 6 pessoas. De quantas maneiras elas podem saltar nos andares 2, 3 e 4, de modo que pelo menos uma pessoa salte em cada andar?

Solução: Seja

- S o conjunto de todas as possíveis combinações de pessoas/andares que saltam
- T o conjunto das possibilidades onde todas as pessoas saltam em só 2 andares

Exercícios

Exercício: No elevador entram 6 pessoas. De quantas maneiras elas podem saltar nos andares 2, 3 e 4, de modo que pelo menos uma pessoa salte em cada andar?

Solução: Seja

- S o conjunto de todas as possíveis combinações de pessoas/andares que saltam
- T o conjunto das possibilidades onde todas as pessoas saltam em só 2 andares

$|S| = 3^6$ (cada pessoa tem 3 possibilidades de andar)

Exercício: No elevador entram 6 pessoas. De quantas maneiras elas podem saltar nos andares 2, 3 e 4, de modo que pelo menos uma pessoa salte em cada andar?

Solução: Seja

- S o conjunto de todas as possíveis combinações de pessoas/andares que saltam
- T o conjunto das possibilidades onde todas as pessoas saltam em só 2 andares

$|S| = 3^6$ (cada pessoa tem 3 possibilidades de andar)

Quanto é $|T|$?

Expressamos T como a união $T_{2,3} \cup T_{2,4} \cup T_{3,4}$, onde

- $T_{2,3}$: possibilidades com todas as pessoas saltando nos andares 2,3
- $T_{2,4}$: possibilidades com todas as pessoas saltando nos andares 2,4
- $T_{3,4}$: possibilidades com todas as pessoas saltando nos andares 3,4

Expressamos T como a união $T_{2,3} \cup T_{2,4} \cup T_{3,4}$, onde

- $T_{2,3}$: possibilidades com todas as pessoas saltando nos andares 2,3
- $T_{2,4}$: possibilidades com todas as pessoas saltando nos andares 2,4
- $T_{3,4}$: possibilidades com todas as pessoas saltando nos andares 3,4

Pelo **princípio da inclusão-exclusão** temos

$$\begin{aligned}
|T| =& |T_{2,3} \cup T_{2,4} \cup T_{3,4}| \\
=& |T_{2,3}| + |T_{2,4}| + |T_{3,4}| \\
& - |T_{2,3} \cap T_{2,4}| - |T_{2,3} \cap T_{3,4}| - |T_{2,4} \cap T_{3,4}| \\
& + |T_{2,3} \cap T_{2,4} \cap T_{3,4}|
\end{aligned}$$

Expressamos T como a união $T_{2,3} \cup T_{2,4} \cup T_{3,4}$, onde

- $T_{2,3}$: possibilidades com todas as pessoas saltando nos andares 2,3
- $T_{2,4}$: possibilidades com todas as pessoas saltando nos andares 2,4
- $T_{3,4}$: possibilidades com todas as pessoas saltando nos andares 3,4

Pelo **princípio da inclusão-exclusão** temos

$$\begin{aligned}|T| =& |T_{2,3} \cup T_{2,4} \cup T_{3,4}| \\ =& |T_{2,3}| + |T_{2,4}| + |T_{3,4}| \\ & - |T_{2,3} \cap T_{2,4}| - |T_{2,3} \cap T_{3,4}| - |T_{2,4} \cap T_{3,4}| \\ & + |T_{2,3} \cap T_{2,4} \cap T_{3,4}|\end{aligned}$$

Temos $|T_{2,3}| = 2^6$, e o mesmo pros outros $|T_{i,j}|$
Temos $|T_{2,3} \cap T_{2,4}| = 1$ (todos saltam no andar 2), e o mesmo pra outras interseções de pares
Temos $|T_{2,3} \cap T_{2,4} \cap T_{3,4}| = 0$
$\Rightarrow |T| = 3 \cdot 2^6 - 3$