Princípios de Contagem e Enumeração Computacional

Permutações com Copias

Vimos na última aula como contar permutações de itens quando temos múltiplas copias de itens:

Permutações com Copias

Vimos na última aula como contar permutações de itens quando temos múltiplas copias de itens:

Ex:

- 3 copias do objeto t_1
- 1 cópia to objeto t_2
- 1 cópia do objeto t_3

Temos $5 \cdot 4$ sequencias distintas:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
t_1 t_1 t_1 t_2 t_3 & t_1 t_1 t_1 t_3 t_2 & t_1 t_1 t_2 t_1 t_3 & t_1 t_1 t_2 t_3 t_1 & t_1 t_1 t_3 t_1 t_2 \\
t_1 t_1 t_3 t_2 t_1 & t_1 t_2 t_1 t_1 t_3 & t_1 t_2 t_1 t_3 t_1 & t_1 t_2 t_3 t_1 t_1 & t_1 t_3 t_1 t_1 t_2 \\
t_1 t_3 t_1 t_2 t_1 & t_1 t_3 t_2 t_1 t_1 & t_2 t_1 t_1 t_1 t_3 & t_2 t_1 t_1 t_3 t_1 & t_2 t_1 t_3 t_1 t_1 \\
t_2 t_3 t_1 t_1 t_1 & t_3 t_1 t_1 t_1 t_2 & t_3 t_1 t_1 t_2 t_1 & t_3 t_1 t_2 t_1 t_1 & t_3 t_2 t_1 t_1 t_1
\end{array}$$

Permutações com Repetições

Caso geral: Suponha que temos k itens e n_i copias do item i, num total de $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ itens

Permutações com Repetições

Caso geral: Suponha que temos k itens e n_i copias do item i, num total de $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ itens

O número de sequencias distintas é

$$\underbrace{\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-(n_1+\ldots+n_{k-1})}{n_k}}_{\text{Metodo 1}} = \frac{n!}{\underbrace{n_1!n_2!\ldots n_k!}_{\text{Metodo 2}}}$$

Equações Diophantinas

Pergunta: A equação $x^2 + y^2 = z^2$ tem solução inteira não-negativa? (x, y, z são variáveis)

Equações Diophantinas

Pergunta: A equação $x^2 + y^2 = z^2$ tem solução inteira não-negativa? (x, y, z são variáveis)

Sim, por exemplo $x = 3, y = 4, z = 5$

Equações Diophantinas

Pergunta: A equação $x^2 + y^2 = z^2$ tem solução inteira não-negativa? (x, y, z são variáveis)

Sim, por exemplo $x = 3, y = 4, z = 5$

Pergunta: A equação $x^3 + y^3 = z^3$ tem solução inteira não-negativa?

Equações Diophantinas

Pergunta: A equação $x^2 + y^2 = z^2$ tem solução inteira não-negativa? (x, y, z são variáveis)

Sim, por exemplo $x = 3, y = 4, z = 5$

Pergunta: A equação $x^3 + y^3 = z^3$ tem solução inteira não-negativa? [Fermat 1600s]

Equações Diophantinas

Pergunta: A equação $x^2 + y^2 = z^2$ tem solução inteira não-negativa? (x, y, z são variáveis)

Sim, por exemplo $x = 3, y = 4, z = 5$

Pergunta: A equação $x^3 + y^3 = z^3$ tem solução inteira não-negativa? [Fermat 1600s]

Não! Não existe solução pra nenhum expoente ≥ 3 [Wiles 1994]

Equações Diophantinas

Pergunta: A equação $x^2 + y^2 = z^2$ tem solução inteira não-negativa? (x, y, z são variáveis)

Sim, por exemplo $x = 3, y = 4, z = 5$

Pergunta: A equação $x^3 + y^3 = z^3$ tem solução inteira não-negativa? [Fermat 1600s]

Não! Não existe solução pra nenhum expoente ≥ 3 [Wiles 1994]

Equação diophantina: Equação dessa forma (possivelmente com mais variáveis e coeficientes diferentes de 1, mais constante):

$$2x^2 + y^2 - 10z^4 = 2w^2$$
$$x + y + z = 4$$
$$\dots$$

Equações Diophantinas

Pergunta: Dada uma equação diophantina, quantas soluções ela tem?

Equações Diophantinas

Pergunta: Dada uma equação diophantina, quantas soluções ela tem?

Mais facil: Existe um algoritmo que dada uma equação diophantina verifica se ela tem solução (pode gastar o tempo que quiser)? [10º problema de Hilbert, 1900]

Equações Diophantinas

Pergunta: Dada uma equação diophantina, quantas soluções ela tem?

Mais facil: Existe um algoritmo que dada uma equação diophantina verifica se ela tem solução (pode gastar o tempo que quiser)? [10º problema de Hilbert, 1900]

Não existe tal algoritmo! É impossível verificar em tempo finito se existe solução [Davis, Matiyasevich, Putnam, Robinson]

Combinações com Repetições

Vamos então considera um tipo especifico de equação diophantina

Vamos então considera um tipo especifico de equação diophantina

Queremos contar o número de soluções inteiras não-negativas da equação

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = r \tag{1}$$

Equações Diophantinas

Exemplo

Quantas solução inteiras não-negativas tem $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$*?*

Equações Diophantinas

Exemplo

Quantas solução inteiras não-negativas tem $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$*?*

As soluções são

(3,0,0,0)	(2,1,0,0)	(2,0,1,0)	(2,0,0,1)
(0,3,0,0)	(1,2,0,0)	(0,2,1,0)	(0,2,0,1)
(0,0,3,0)	(1,0,2,0)	(0,1,2,0)	(0,0,2,1)
(0,0,0,3)	(1,0,0,2)	(0,1,0,2)	(0,0,1,2)
(1,1,1,0)	(1,1,0,1)	(1,0,1,1)	(0,1,1,1)

Pergunta: Como computar a quantidade de soluções sem enumerar todas?

Técnica de palitos e asteriscos: Codificar as soluções utilizamos os símbolos $*$ e $|$

Técnica de palitos e asteriscos

Técnica de palitos e asteriscos: Codificar as soluções utilizamos os símbolos $*$ e $|$

Por exemplo

$$
\begin{array}{rl}
* * *||| & \text{representa a solução } (3,0,0,0) \\
* * | * || & \text{representa a solução } (2,1,0,0) \\
*|| * | * & \text{representa a solução } (1,0,1,1) \\
& \ldots
\end{array}
$$

Técnica de palitos e asteriscos

Técnica de palitos e asteriscos: Codificar as soluções utilizamos os símbolos $*$ e $|$

Por exemplo

$$\begin{array}{ll} ***||| & \text{representa a solução } (3,0,0,0) \\ **|*|| & \text{representa a solução } (2,1,0,0) \\ *||*|* & \text{representa a solução } (1,0,1,1) \\ & \ldots \end{array}$$

Note que cada permutação dos 3 '$*$' e 3 '$|$' dá uma solução $\Rightarrow$ permutação com cópias

Técnica de palitos e asteriscos

Técnica de palitos e asteriscos: Codificar as soluções utilizamos os símbolos $*$ e $|$

Por exemplo

$$\begin{array}{ll} *\,*\,*||| & \text{representa a solução } (3,0,0,0) \\ *\,*\,|\,*\,|| & \text{representa a solução } (2,1,0,0) \\ *||\,*\,|\,* & \text{representa a solução } (1,0,1,1) \\ & \dots \end{array}$$

Note que cada permutação dos 3 '$*$' e 3 '$|$' dá uma solução $\Rightarrow$ permutação com cópias

Temos

$$\frac{6!}{3!3!} = 5 \cdot 4$$

permutações distintas $\Rightarrow$ número de soluções

Técnica de palitos e asteriscos

Caso geral: Quantas soluçoes inteiras não-negativas tem $\sum_{i=1}^{k} x_i = r$?

Técnica de palitos e asteriscos

Caso geral: Quantas soluçoes inteiras não-negativas tem $\sum_{i=1}^{k} x_i = r$?

Nesse caso temos r '$*$' (soma que queremos) e $k-1$ '$|$'

Técnica de palitos e asteriscos

Caso geral: Quantas soluçoes inteiras não-negativas tem $\sum_{i=1}^{k} x_i = r$?

Nesse caso temos r '$*$' (soma que queremos) e $k-1$ '$|$'

O número de permutações (e portanto soluções) é

$$\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}$$

Técnica de palitos e asteriscos

Exemplo

Um caminhão deve transportar 1000kg de alimentos, entre açúcar, arroz, feijão e sal. Sabendo que cada alimento esta armazenado em sacos de 5kg, quantas são as possibilidades de completar os 1000kg?

Técnica de palitos e asteriscos

Utilizamos x_1, x_2, x_3, x_4, respectivamente, para denotar o número de sacos de açúcar, arroz, feijão e sal. O número de possibilidades é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 1000,$$

Técnica de palitos e asteriscos

Utilizamos x_1, x_2, x_3, x_4, respectivamente, para denotar o número de sacos de açúcar, arroz, feijão e sal. O número de possibilidades é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 1000,$$

que é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200,$$

Técnica de palitos e asteriscos

Utilizamos x_1, x_2, x_3, x_4, respectivamente, para denotar o número de sacos de açúcar, arroz, feijão e sal. O número de possibilidades é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 1000,$$

que é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200,$$

Usando o slide anterior, temos $\frac{203!}{200!3!}$ soluções

Técnica de palitos e asteriscos

Exemplo

Quantas soluções inteiras **(estritamente) positivas** *tem a equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Técnica de palitos e asteriscos

Exemplo

Quantas soluções inteiras **(estritamente) positivas** *tem a equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Faça as substituições de variáveis: $x_1 = 1 + z_1$, $x_2 = 1 + z_2$, $x_3 = 1 + z_3$ e $x_4 = 1 + z_4$, onde os z_i's são inteiros não-negativos

Técnica de palitos e asteriscos

Exemplo

Quantas soluções inteiras **(estritamente) positivas** *tem a equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Faça as substituições de variáveis: $x_1 = 1 + z_1$, $x_2 = 1 + z_2$, $x_3 = 1 + z_3$ e $x_4 = 1 + z_4$, onde os z_i's são inteiros não-negativos

Note que pra qualquer valor dos z_i's, os x_i's são maior ou igual a 1

Técnica de palitos e asteriscos

Exemplo

Quantas soluções inteiras **(estritamente) positivas** *tem a equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Faça as substituições de variáveis: $x_1 = 1 + z_1$, $x_2 = 1 + z_2$, $x_3 = 1 + z_3$ e $x_4 = 1 + z_4$, onde os z_i's são inteiros não-negativos

Note que pra qualquer valor dos z_i's, os x_i's são maior ou igual a 1

Equação nas novas variáveis:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 3$$

Técnica de palitos e asteriscos

Exemplo

Quantas soluções inteiras **(estritamente) positivas** *tem a equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Faça as substituições de variáveis: $x_1 = 1 + z_1$, $x_2 = 1 + z_2$, $x_3 = 1 + z_3$ e $x_4 = 1 + z_4$, onde os z_i's são inteiros não-negativos

Note que pra qualquer valor dos z_i's, os x_i's são maior ou igual a 1

Equação nas novas variáveis:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 3$$

Basta contar soluções não-negativas pra essa equação nos z_i's $\Rightarrow \frac{6!}{3!3!}$

Técnica de palitos e asteriscos

Exemplo

Quantas soluções inteiras não negativas tem a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \tag{2}$$

Técnica de palitos e asteriscos

Exemplo

Quantas soluções inteiras não negativas tem a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \tag{2}$$

Método 1: Somar o número de soluções não negativas das equações: $\sum_{i=1}^{4} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 2$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 3$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 4$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 5$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 6$

Técnica de palitos e asteriscos

Exemplo

Quantas soluções inteiras não negativas tem a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \tag{2}$$

Método 1: Somar o número de soluções não negativas das equações: $\sum_{i=1}^{4} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 2$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 3$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 4$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 5$, $\sum_{i=1}^{4} x_i = 6$

Total de soluções:

$$\sum_{r=0}^{6} \frac{(r+3)!}{r!3!} = 210$$

Método 2: Observe que existe uma bijeção (correspondência 1-a1) soluções da desigualdade e as soluções inteiras não-negativas da igualdade

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + z = 6 \tag{3}$$

Método 2: Observe que existe uma bijeção (correspondência 1-a1) soluções da desigualdade e as soluções inteiras não-negativas da igualdade

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + z = 6 \tag{3}$$

Ex: Solução $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$ da desigualdade corresponde a solução da igualdade com mesmos valores de x_i's e $z = 4$

Técnica de palitos e asteriscos

Método 2: Observe que existe uma bijeção (correspondência 1-a1) soluções da desigualdade e as soluções inteiras não-negativas da igualdade

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + z = 6 \tag{3}$$

Ex: Solução $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$ da desigualdade corresponde a solução da igualdade com mesmos valores de x_i's e $z = 4$

Portanto, o número de soluções da desigualdade é o mesmo da igualdade acima, que é

$$\frac{10!}{6!4!} = 210$$

Equações Diophantinas Lineares

Agora consideraremos equações diophantinas mais gerais, por exemplo

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 13$$

Equações Diophantinas Lineares

Agora consideraremos equações diophantinas mais gerais, por exemplo

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 13$$

Equação diophantina linear: (v_i's são coeficientes positivos e x_i's são variáveis)

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = T \tag{4}$$

Equações Diophantinas Lineares

Agora consideraremos equações diophantinas mais gerais, por exemplo

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 13$$

Equação diophantina linear: (v_i's são coeficientes positivos e x_i's são variáveis)

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = T \tag{4}$$

Queremos contar quantas soluções inteiras não-negativas tal equação tem

Equações Diophantinas Lineares

Agora consideraremos equações diophantinas mais gerais, por exemplo

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 13$$

Equação diophantina linear: (v_i's são coeficientes positivos e x_i's são variáveis)

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = T \tag{4}$$

Queremos contar quantas soluções inteiras não-negativas tal equação tem

Não existe formula fechada. Queremos algoritmo pra contar

Equações Diophantinas Lineares

Agora consideraremos equações diophantinas mais gerais, por exemplo

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 13$$

Equação diophantina linear: (v_i's são coeficientes positivos e x_i's são variáveis)

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = T \tag{4}$$

Queremos contar quantas soluções inteiras não-negativas tal equação tem

Não existe formula fechada. Queremos algoritmo pra contar

(Princípio de Programação Dinâmica, preparação para *Análise de Algoritmos*)

(Pode pensar em $v_1, v_2, \ldots, v_n$ como n valores de moedas diferentes, e queremos contar de quantas formas podemos gerar o valor T usando essas moedas)

Definição

$S(k, A) =$ *número de maneiras de somar o valor* A *utilizando quantidade inteira não-negativa dos valores* $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$

(Pode pensar em $v_1, v_2, \ldots, v_n$ como n valores de moedas diferentes, e queremos contar de quantas formas podemos gerar o valor T usando essas moedas)

Definição

$S(k, A) =$ *número de maneiras de somar o valor A utilizando quantidade inteira não-negativa dos valores $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$*

Exemplo: Se $v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4,$

$$S(2, 7) = 1$$

pois só tem uma maneira de somar valor 7 usando "moedas" de valor v_2 e v_3 (usa uma de cada), e

$$S(1, 7) = 2$$

pois temos duas possibilidades pra somar valor 7 usando "moedas" de valor v_1, v_2, v_3 (duas de v_1 e uma de v_2, ou uma de v_2 e uma de v_3)

Pergunta: Qual $S(k, A)$ conta o número de soluções de equação original

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = T \tag{5}$$

Pergunta: Qual $S(k, A)$ conta o número de soluções de equação original

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = T \tag{5}$$

Resp: $S(1, T)$

Pergunta: Qual $S(k, A)$ conta o número de soluções de equação original

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = T \tag{5}$$

Resp: $S(1, T)$

Para computar $S(1, T)$, iremos obter equação de recorrência relacionando $S(k, A)$ com $S(k+1, A')$, e fazer algoritmo "por indução"

Pergunta: Qual $S(k, A)$ conta o número de soluções de equação original

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = T \tag{5}$$

Resp: $S(1, T)$

Para computar $S(1, T)$, iremos obter equação de recorrência relacionando $S(k, A)$ com $S(k+1, A')$, e fazer algoritmo “por indução”

Por exemplo, se utilizarmos exatamente p moedas de valor v_1, devemos então somar $T - pv_1$ utilizando moedas de valor $v_2, v_3, \ldots, v_n$

Pergunta: Qual $S(k, A)$ conta o número de soluções de equação original

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = T \tag{5}$$

Resp: $S(1, T)$

Para computar $S(1, T)$, iremos obter equação de recorrência relacionando $S(k, A)$ com $S(k+1, A')$, e fazer algoritmo "por indução"

Por exemplo, se utilizarmos exatamente p moedas de valor v_1, devemos então somar $T - pv_1$ utilizando moedas de valor $v_2, v_3, \ldots, v_n$

Portanto, o número de soluções da equação (5) que utiliza exatamente p moedas de valor v_1 é igual ao número de soluções da equação

$$\sum_{i=2}^{n} v_i x_i = T - pv_1, \tag{6}$$

ou seja, $S(2, T - pv_1)$.

O Problema do Troco

Considerando todas as possibilidades de utilização de moedas de valor v_1 (podemos usar de 0 a $\lfloor T/v_1 \rfloor$ moedas desse valor) chegamos à equação de recorrência

$$S(1, T) = \sum_{j=0}^{\lfloor T/v_1 \rfloor} S(2, T - j \cdot v_1)$$

O Problema do Troco

Considerando todas as possibilidades de utilização de moedas de valor v_1 (podemos usar de 0 a $\lfloor T/v_1 \rfloor$ moedas desse valor) chegamos à equação de recorrência

$$S(1, T) = \sum_{j=0}^{\lfloor T/v_1 \rfloor} S(2, T - j \cdot v_1)$$

Mais geral, de forma análoga temos pra $k < n$

$$S(k, A) = \sum_{j=0}^{\lfloor A/v_k \rfloor} S(k+1, A - j \cdot v_k) \tag{7}$$

O Problema do Troco

Considerando todas as possibilidades de utilização de moedas de valor v_1 (podemos usar de 0 a $\lfloor T/v_1 \rfloor$ moedas desse valor) chegamos à equação de recorrência

$$S(1, T) = \sum_{j=0}^{\lfloor T/v_1 \rfloor} S(2, T - j \cdot v_1)$$

Mais geral, de forma análoga temos pra $k < n$

$$S(k, A) = \sum_{j=0}^{\lfloor A/v_k \rfloor} S(k+1, A - j \cdot v_k) \tag{7}$$

Pra última moeda, temos $S(n, A) = 1$ se A é múltiplo do valor v_n da moeda, e $S(n, A) = 0$ caso contrário

Algoritmo

Dada esta equação de recorrencia podemos escrever um algoritmo recursivo para calcular $S(1, T)$

Algoritmo

Dada esta equação de recorrencia podemos escrever um algoritmo recursivo para calcular $S(1, T)$

Utilizamos um vetor global v para armazenar os valores das moedas.

```
PROCEDIMENTO S(k,A)
    Se k = n
        Se A é múltiplo de v[n] retorne 1
        Senão retorne 0
    Senão
        Total ← 0
        Para j = 0 até ⌊A/v[k]⌋
            Total ← Total + S(k + 1, A − jv[k])
        Fim Para
        Retorne Total
    Fim Se

MAIN
    Leia n, v, T
    IMPRIMA S(1, T)
```

Exercício 1: (Gerar todas permutações com cópias) Suponha que temos k letras $Letra[1], \ldots, Letra[k]$, e $c[i]$ cópias da letra $Letra[i]$

Gere todas as permutações dessas $c[1] + c[2] + \ldots c[k]$ letras adaptando o algoritmo que gera todas as palavras de tamanho n com essas letras (que pode repetir letra quantas vezes quiser)

```
PROCEDIMENTO GeraPalavras(i,P)   #P[i+1], P[i+2],..., P[n] estão preenchidas
    If  i = 0    #P está totalmente preenchido
        Imprima a palavra P
    Else
        For  j = 1 to s
            P[i] ← letra Letra[j]
            GeraPalavras(i-1, P)
        End For
    End If

MAIN
    Letra ← vetor com s posições contendo as letras possiveis
    P ← vetor de n posições
    GeraPalavras(n, P)
```

Exercícios

Exercício 2: Quantas são as soluções inteiras não-negativas do sistema

$$x + y + z = 20$$
$$x \leq 10,\ \ y \leq 10,\ \ z \leq 10$$

(Dica: Conte as soluções que ignoram as restrições $x \leq 10$, etc. e depois desconte as que não satisfazem essas desigualdades)