Contagem

Método da Bijeção

Método para mostrar que duas quantidades A e B são iguais

Método da Bijeção

Método para mostrar que duas quantidades A e B são iguais

Ideia: Fazer uma bijeção (associação 1-para-1) entre objetos contados por A e B

Método da Bijeção

Método para mostrar que duas quantidades A e B são iguais

Ideia: Fazer uma bijeção (associação 1-para-1) entre objetos contados por A e B

Exemplo bobo: Os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{a, b, c\}$ tem o mesmo tamanho pois temos a bijeção

$$1 \leftrightarrow a, \; 2 \leftrightarrow b, \; 3 \leftrightarrow c$$

Método da Bijeção

Método para mostrar que duas quantidades A e B são iguais

Ideia: Fazer uma bijeção (associação 1-para-1) entre objetos contados por A e B

Exemplo bobo: Os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{a, b, c\}$ tem o mesmo tamanho pois temos a bijeção

$$1 \leftrightarrow a, \ 2 \leftrightarrow b, \ 3 \leftrightarrow c$$

Note: Numa bijeção, nenhum objeto contado por B pode ficar sem par em A

Lembre: $\binom{n}{r}$ denote número de subconjuntos de r elementos de um universo com n elementos

Proposição

Para todo n *e* $r \leq n$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Proposição

Para todo n *e* $r \leq n$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Prova pelo metodo da bijecao: $\binom{n}{r}$ conta subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de tamanho r, $\binom{n}{n-r}$ conta os de tamanho $n - r$

Proposição

Para todo n e $r \leq n$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Prova pelo metodo da bijecao: $\binom{n}{r}$ conta subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de tamanho r, $\binom{n}{n-r}$ conta os de tamanho $n - r$

Temos uma bijeção entre subconjuntos de tamanho r e subconjuntos de tamanho $n - r$:

associe conjunto U de tamanho r ao seu complemento $U^c = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus U$

Proposição

Para todo n e $r \leq n$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Prova pelo metodo da bijecao: $\binom{n}{r}$ conta subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de tamanho r, $\binom{n}{n-r}$ conta os de tamanho $n - r$

Temos uma bijeção entre subconjuntos de tamanho r e subconjuntos de tamanho $n - r$:

associe conjunto U de tamanho r ao seu complemento $U^c = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus U$

Note que todo conjunto de tamanho $n - r$ tem seu par de tamanho r, então é bijeção

Proposição

Para todo n *e* $r \leq n$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Prova pelo metodo da bijecao: $\binom{n}{r}$ conta subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de tamanho r, $\binom{n}{n-r}$ conta os de tamanho $n - r$

Temos uma bijeção entre subconjuntos de tamanho r e subconjuntos de tamanho $n - r$:

associe conjunto U de tamanho r ao seu complemento $U^c = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus U$

Note que todo conjunto de tamanho $n - r$ tem seu par de tamanho r, então é bijeção

Devido a essa bijeção, o número de conjuntos de tamanho r e $n - r$ é o mesmo, provando a proposição

Proposição

Para todo n *e* $r \leq n$

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

Proposição

Para todo n e $r \leq n$

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

Prova pelo metodo da bijecao: Qual bijeção?

Proposição

Para todo n *e* $r \leq n$

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

Prova pelo metodo da bijecao: Qual bijeção?

Seja

- U a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n+1\}$ de tam. $r+1$
- U_{com} a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n+1\}$ de tam $r+1$ contendo o elemento $n+1$
- U_{sem} a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n+1\}$ de tam $r+1$ sem o elemento $n+1$

Proposição

Para todo n *e* $r \leq n$

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

Prova pelo metodo da bijecao: Qual bijeção?

Seja

- U a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n+1\}$ de tam. $r+1$
- U_{com} a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n+1\}$ de tam $r+1$ contendo o elemento $n+1$
- U_{sem} a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n+1\}$ de tam $r+1$ sem o elemento $n+1$

Pergunta: Qual a relação entre a proposição e esses conjuntos?

Proposição

Para todo n e $r \leq n$

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

Prova pelo metodo da bijecao: Qual bijeção?

Seja

- U a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n+1\}$ de tam. $r+1$
- U_{com} a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n+1\}$ de tam $r+1$ contendo o elemento $n+1$
- U_{sem} a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n+1\}$ de tam $r+1$ sem o elemento $n+1$

Pergunta: Qual a relação entre a proposição e esses conjuntos?

Equivalente a $|U| = |U_{com}| + |U_{sem}| = |U_{com} \cup U_{sem}|$ a ultima igualdade pois as coleções não tem elementos em comum

Mas certamente U tem o mesmo tamanho de $(U_{com} \cup U_{sem})$. Por exemplo, temos bijeção "trivial" entre essas duas coleções:

Mas certamente U tem o mesmo tamanho de $(U_{com} \cup U_{sem})$. Por exemplo, temos bijeção "trivial" entre essas duas coleções:

Dado um conjunto S em U

- se S contém $n+1$, associe ele com o mesmo conjunto S em U_{com}
- se S não contém $n+1$, associe ele como mesmo conjunto S em U_{sem}

Mas certamente U tem o mesmo tamanho de $(U_{com} \cup U_{sem})$. Por exemplo, temos bijeção "trivial" entre essas duas coleções:

Dado um conjunto S em U

- se S contém $n+1$, associe ele com o mesmo conjunto S em U_{com}
- se S não contém $n+1$, associe ele como mesmo conjunto S em U_{sem}

Note que todo conjunto em $U_{com} \cup U_{sem}$ está associado a um conjunto em U, portanto é bijeção

Mas certamente U tem o mesmo tamanho de $(U_{com} \cup U_{sem})$. Por exemplo, temos bijeção "trivial" entre essas duas coleções:

Dado um conjunto S em U

- se S contém $n+1$, associe ele com o mesmo conjunto S em U_{com}
- se S não contém $n+1$, associe ele como mesmo conjunto S em U_{sem}

Note que todo conjunto em $U_{com} \cup U_{sem}$ está associado a um conjunto em U, portanto é bijeção

Isso prova a proposição

Mas certamente U tem o mesmo tamanho de $(U_{com} \cup U_{sem})$. Por exemplo, temos bijeção "trivial" entre essas duas coleções:

Dado um conjunto S em U

- se S contém $n+1$, associe ele com o mesmo conjunto S em U_{com}
- se S não contém $n+1$, associe ele como mesmo conjunto S em U_{sem}

Note que todo conjunto em $U_{com} \cup U_{sem}$ está associado a um conjunto em U, portanto é bijeção

Isso prova a proposição

(Além disso, explica porque a proposição é verdadeira)

Permutações com Repetições

Estamos interessados em sequencias (ordem importa) mas agora tem repeticao

Permutações com Repetições

Estamos interessados em sequencias (ordem importa) mas agora tem repeticao

A ordem dentre os itens repetidos não importa

Exemplo

Temos uma coleção com 5 *objetos, onde temos 3 copias do objeto* t_1, *1 cópia to objeto* t_2, *e 1 cópia do objeto* t_3.
Quais são as sequências distintas não equivalentes que podem ser formadas com estes objetos?

Permutações com Repetições

Exemplo

Temos uma coleção com 5 objetos, onde temos 3 copias do objeto t_1, 1 cópia to objeto t_2, e 1 cópia do objeto t_3.
Quais são as sequências distintas não equivalentes que podem ser formadas com estes objetos?

Pergunta: Temos 5! sequencias dessas?

Permutações com Repetições

Exemplo

Temos uma coleção com 5 *objetos, onde temos 3 copias do objeto* t_1*, 1 cópia to objeto* t_2*, e 1 cópia do objeto* t_3*.*
Quais são as sequências distintas não equivalentes que podem ser formadas com estes objetos?

Pergunta: Temos 5! sequencias dessas?

Não!

Permutações com Repetições

As sequencias possiveis sao

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
t_1 t_1 t_1 t_2 t_3 & t_1 t_1 t_1 t_3 t_2 & t_1 t_1 t_2 t_1 t_3 & t_1 t_1 t_2 t_3 t_1 & t_1 t_1 t_3 t_1 t_2 \\
t_1 t_1 t_3 t_2 t_1 & t_1 t_2 t_1 t_1 t_3 & t_1 t_2 t_1 t_3 t_1 & t_1 t_2 t_3 t_1 t_1 & t_1 t_3 t_1 t_1 t_2 \\
t_1 t_3 t_1 t_2 t_1 & t_1 t_3 t_2 t_1 t_1 & t_2 t_1 t_1 t_1 t_3 & t_2 t_1 t_1 t_3 t_1 & t_2 t_1 t_3 t_1 t_1 \\
t_2 t_3 t_1 t_1 t_1 & t_3 t_1 t_1 t_1 t_2 & t_3 t_1 t_1 t_2 t_1 & t_3 t_1 t_2 t_1 t_1 & t_3 t_2 t_1 t_1 t_1
\end{array}
$$

Permutações com Repetições

As sequencias possiveis sao

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
t_1 t_1 t_1 t_2 t_3 & t_1 t_1 t_1 t_3 t_2 & t_1 t_1 t_2 t_1 t_3 & t_1 t_1 t_2 t_3 t_1 & t_1 t_1 t_3 t_1 t_2 \\
t_1 t_1 t_3 t_2 t_1 & t_1 t_2 t_1 t_1 t_3 & t_1 t_2 t_1 t_3 t_1 & t_1 t_2 t_3 t_1 t_1 & t_1 t_3 t_1 t_1 t_2 \\
t_1 t_3 t_1 t_2 t_1 & t_1 t_3 t_2 t_1 t_1 & t_2 t_1 t_1 t_1 t_3 & t_2 t_1 t_1 t_3 t_1 & t_2 t_1 t_3 t_1 t_1 \\
t_2 t_3 t_1 t_1 t_1 & t_3 t_1 t_1 t_1 t_2 & t_3 t_1 t_1 t_2 t_1 & t_3 t_1 t_2 t_1 t_1 & t_3 t_2 t_1 t_1 t_1
\end{array}
$$

Ou seja, temos $5 \cdot 4$ sequencias

Permutações com Repetições

Permutações com Repetições

Pergunta: Como podemos chegar nesse valor?

Permutações com Repetições

Pergunta: Como podemos chegar nesse valor?

Metodo 1: Temos 5 posições _ _ _ _ _ a preencher

Permutações com Repetições

Pergunta: Como podemos chegar nesse valor?

Metodo 1: Temos 5 posições _ _ _ _ _ a preencher

Evento E_1: possíveis posições para as 3 copias de t_1
E_2: possíveis posições para a copia de t_2
E_3: possíveis posições para a copia de t_3

Permutações com Repetições

Pergunta: Como podemos chegar nesse valor?

Metodo 1: Temos 5 posições _ _ _ _ _ a preencher

Evento E_1: possíveis posições para as 3 copias de t_1
E_2: possíveis posições para a copia de t_2
E_3: possíveis posições para a copia de t_3

E_1 tem $\binom{5}{3}$ possibilidades (ordem das copias nao importa)
E_2 tem 2 possibilidades (já ocupamos 3 das 5 posições com t_1)
E_2 tem 1 possibilidade (já ocupamos 4 das 5 posições com t_1 e t_2)

Pergunta: Como podemos chegar nesse valor?

Metodo 1: Temos 5 posições _ _ _ _ _ a preencher

Evento E_1: possíveis posições para as 3 copias de t_1
E_2: possíveis posições para a copia de t_2
E_3: possíveis posições para a copia de t_3

E_1 tem $\binom{5}{3}$ possibilidades (ordem das copias nao importa)
E_2 tem 2 possibilidades (já ocupamos 3 das 5 posições com t_1)
E_2 tem 1 possibilidade (já ocupamos 4 das 5 posições com t_1 e t_2)

Total:

$$\binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4.$$

Permutações com Repetições

(Opcional)

Metodo 2: Considerar todas as 5! permutações e desconsiderar a ordem das cópias dos itens:

Permutações com Repetições

(Opcional)

Metodo 2: Considerar todas as 5! permutações e desconsiderar a ordem das cópias dos itens:

Total:

$$\frac{5!}{3!1!1!} = 5 \cdot 4$$

Permutações com Repetições

Caso geral: Suponha que temos k items e n_i copias do item i, num total de $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ itens

Permutações com Repetições

Caso geral: Suponha que temos k items e n_i copias do item i, num total de $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ itens

O número de sequencias distintas é

$$\underbrace{\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n - (n_1 + \ldots + n_{k-1})}{n_k}}_{\text{Metodo 1}} = \underbrace{\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}}_{\text{Metodo 2}}$$

Exercicios

Exercicio 1: Prove pelo metodo da bijeção que

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Exercicio 2: Quantas permutações distintas tem a palavra MISSISSIPI?

Resposta exercicio 1:

Resposta exercicio 1:

Sendo U_r a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ de tamanho r, o lado esquerdo da equação é

Resposta exercicio 1:

Sendo U_r a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ de tamanho r, o lado esquerdo da equação é

$$|U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n|$$

Resposta exercicio 1:

Sendo U_r a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ de tamanho r, o lado esquerdo da equação é

$$|U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n|$$

E o lado direito da equação conta todos os subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$

Resposta exercicio 1:

Sendo U_r a coleção de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ de tamanho r, o lado esquerdo da equação é

$$|U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n|$$

E o lado direito da equação conta todos os subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$

Novamente temos bijecção "trivial" entre as coisas contadas no lado esquerdo e no lado direito, provando a proposição

Exercicios

Resposta exercicio 2:

Existem $\binom{10}{1} = 10$ posições para colocar a letra M

Dado que a letra M já foi colocada, existem $\binom{9}{4} = 126$ possibilidades para dispor todas as letras I

Dado que as letras M e I já foram colocadas, existem $\binom{5}{4} = 5$ possibilidades para dispor as letras S

Finalmente, sobra uma posição para letra P

Utilizando o princípio da multiplicação, temos um total de $10 \times 126 \times 5 \times 1 = 6300$ possibilidades