

# Princípios de Contagem e Enumeração Computacional

# Combinações

De quantas maneiras podemos selecionar um **subconjunto** de  $r$  objetos de um conjunto de  $n$  objetos?

# Combinações

De quantas maneiras podemos selecionar um **subconjunto** de  $r$  objetos de um conjunto de  $n$  objetos?

A **única** diferença pros problemas de “permutação” das aulas anteriores é que a **ordem dos  $r$  objetos selecionados não importa**

# Combinações

De quantas maneiras podemos selecionar um **subconjunto** de  $r$  objetos de um conjunto de  $n$  objetos?

A **única** diferença pros problemas de “permutação” das aulas anteriores é que a **ordem dos  $r$  objetos selecionados não importa**

Utilizamos  $\binom{n}{r}$  para denotar tal quantidade.

## Exemplo

*Seja o conjunto  $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$  de  $n = 4$  objetos e  $r = 2$ .*

*Então os subconjuntos possíveis são:*

$\{o_1, o_2\}, \{o_1, o_3\}, \{o_1, o_4\}, \{o_2, o_3\}, \{o_2, o_4\}, \{o_3, o_4\}$ .

*Portanto,  $\binom{4}{2} = 6$ .*

# Combinações

## Exemplo

*Seja o conjunto  $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$  de  $n = 4$  objetos e  $r = 2$ .*

*Então os subconjuntos possíveis são:*

$\{o_1, o_2\}, \{o_1, o_3\}, \{o_1, o_4\}, \{o_2, o_3\}, \{o_2, o_4\}, \{o_3, o_4\}$ .

*Portanto,  $\binom{4}{2} = 6$ .*

**Pergunta:** Quantas **sequencias** (ordem importa) temos de tamanho 2?

## Exemplo

*Seja o conjunto  $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$  de  $n = 4$  objetos e  $r = 2$ .*

*Então os subconjuntos possíveis são:*

$\{o_1, o_2\}, \{o_1, o_3\}, \{o_1, o_4\}, \{o_2, o_3\}, \{o_2, o_4\}, \{o_3, o_4\}$ .

*Portanto,  $\binom{4}{2} = 6$ .*

**Pergunta:** Quantas **sequencias** (ordem importa) temos de tamanho 2?

**Resposta:** Cada **subconjunto** de tamanho 2 corresponde exatamente a 2! **sequencias** diferentes (as permutações de seus elementos)

# Combinações

## Exemplo

Seja o conjunto  $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$  de  $n = 4$  objetos e  $r = 2$ .

Então os subconjuntos possíveis são:

$\{o_1, o_2\}, \{o_1, o_3\}, \{o_1, o_4\}, \{o_2, o_3\}, \{o_2, o_4\}, \{o_3, o_4\}$ .

Portanto,  $\binom{4}{2} = 6$ .

**Pergunta:** Quantas **sequencias** (ordem importa) temos de tamanho 2?

**Resposta:** Cada **subconjunto** de tamanho 2 corresponde exatamente a  $2!$  **sequencias** diferentes (as permutações de seus elementos)

(Note que as subconjuntos diferentes dão sequencias diferentes, e que todas as sequencias podem ser “geradas” a partir de algum conjunto.)



# Combinações

## Exemplo

Seja o conjunto  $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$  de  $n = 4$  objetos e  $r = 2$ .

Então os subconjuntos possíveis são:

$\{o_1, o_2\}, \{o_1, o_3\}, \{o_1, o_4\}, \{o_2, o_3\}, \{o_2, o_4\}, \{o_3, o_4\}$ .

Portanto,  $\binom{4}{2} = 6$ .

**Pergunta:** Quantas **sequencias** (ordem importa) temos de tamanho 2?

**Resposta:** Cada **subconjunto** de tamanho 2 corresponde exatamente a  $2!$  **sequencias** diferentes (as permutações de seus elementos)

(Note que as subconjuntos diferentes dão sequencias diferentes, e que todas as sequencias podem ser “geradas” a partir de algum conjunto.)

Portanto temos  $2! \cdot \binom{4}{2}$  sequencias de tamanho 2

# Combinações

Considere o caso geral  $\binom{n}{k}$  (subconjuntos de tamanho  $k$ )

# Combinações

Considere o caso geral  $\binom{n}{k}$  (subconjuntos de tamanho  $k$ )

**Pergunta:** Quantas **sequencias** de tamanho  $k$  temos?

# Combinações

Considere o caso geral  $\binom{n}{k}$  (subconjuntos de tamanho  $k$ )

**Pergunta:** Quantas **sequencias** de tamanho  $k$  temos?

**Resposta:** Cada **subconjunto** corresponde a  $k!$  **sequencias** de tamanho  $k$ , portanto

$$\begin{aligned}k! \cdot \binom{n}{k} &= \text{número de sequencias de tamanho } k \\ \Rightarrow \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\end{aligned}$$

(pois o  $(n-k)!$  cancela os últimos  $n-k$  termos do numerador)

**Jogo da Sena modificado.** Números de 1 a 100

**Jogo da Sena modificado.** Números de 1 a 100

Jogador escolhe 3 números

**Jogo da Sena modificado.** Números de 1 a 100

Jogador escolhe 3 números

Um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

**Jogo da Sena modificado.** Números de 1 a 100

Jogador escolhe 3 números

Um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto de números for **igual** ao sorteado



**Jogo da Sena modificado.** Números de 1 a 100

Jogador escolhe 3 números

Um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto de números for **igual** ao sorteado

**Pergunta:** Qual é a probabilidade do jogador ganhar?

**Jogo da Sena modificado.** Números de 1 a 100

Jogador escolhe 3 números

Um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto de números for **igual** ao sorteado

**Pergunta:** Qual é a probabilidade do jogador ganhar?

**Resposta:** Tem  $\binom{100}{3}$  possíveis conjuntos a serem sorteados, só um desses faz jogador ganhar

**Jogo da Sena modificado.** Números de 1 a 100

Jogador escolhe 3 números

Um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto de números for **igual** ao sorteado

**Pergunta:** Qual é a probabilidade do jogador ganhar?

**Resposta:** Tem  $\binom{100}{3}$  possíveis conjuntos a serem sorteados, só um desses faz jogador ganhar

Portanto, probabilidade de ganhar é  $\frac{1}{\binom{100}{3}}$

**Jogo da Sena modificado 2.** Agora jogador escolhe 4 números

# Combinações

**Jogo da Sena modificado 2.** Agora jogador escolhe 4 números

Novamente um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

# Combinações

**Jogo da Sena modificado 2.** Agora jogador escolhe 4 números

Novamente um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto **contiver** os 3 números sorteados

# Combinações

**Jogo da Sena modificado 2.** Agora jogador escolhe 4 números

Novamente um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto **contiver** os 3 números sorteados

Ex: se jogador escolheu  $\{1, 2, 3, 4\}$ , ganha caso o sorteio seja  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ , e  $\{2, 3, 4\}$ .

# Combinações

**Jogo da Sena modificado 2.** Agora jogador escolhe 4 números

Novamente um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto **contiver** os 3 números sorteados

Ex: se jogador escolheu  $\{1, 2, 3, 4\}$ , ganha caso o sorteio seja  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ , e  $\{2, 3, 4\}$ .

**Pergunta:** Qual é a probabilidade do jogador ganhar?



# Combinações

**Jogo da Sena modificado 2.** Agora jogador escolhe 4 números

Novamente um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto **contiver** os 3 números sorteados

Ex: se jogador escolheu  $\{1, 2, 3, 4\}$ , ganha caso o sorteio seja  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ , e  $\{2, 3, 4\}$ .

**Pergunta:** Qual é a probabilidade do jogador ganhar?

**Resposta:** Tem  $\binom{100}{3}$  possíveis conjuntos a serem sorteados...

# Combinações

**Jogo da Sena modificado 2.** Agora jogador escolhe 4 números

Novamente um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto **contiver** os 3 números sorteados

Ex: se jogador escolheu  $\{1, 2, 3, 4\}$ , ganha caso o sorteio seja  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ , e  $\{2, 3, 4\}$ .

**Pergunta:** Qual é a probabilidade do jogador ganhar?

**Resposta:** Tem  $\binom{100}{3}$  possíveis conjuntos a serem sorteados...

mas agora o jogador tem  $\binom{4}{3}$  chances de ganhar (qualquer subconjunto de tamanho 3 dos seus 4 números)

# Combinações

**Jogo da Sena modificado 2.** Agora jogador escolhe 4 números

Novamente um conjunto de 3 números é sorteado aleatoriamente dentre todas as possibilidades

O jogador ganha se seu conjunto **contiver** os 3 números sorteados

Ex: se jogador escolheu  $\{1, 2, 3, 4\}$ , ganha caso o sorteio seja  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ , e  $\{2, 3, 4\}$ .

**Pergunta:** Qual é a probabilidade do jogador ganhar?

**Resposta:** Tem  $\binom{100}{3}$  possíveis conjuntos a serem sorteados...

mas agora o jogador tem  $\binom{4}{3}$  chances de ganhar (qualquer subconjunto de tamanho 3 dos seus 4 números)

Portanto, probabilidade de ganhar é  $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{100}{3}}$

## Exemplo

*Considere o trecho de código abaixo:*

*Para  $i=1, \dots, n-1$*

*Para  $j=i+1, \dots, n$*

*PRINT('OI')*

## Exemplo

Considere o trecho de código abaixo:

*Para  $i=1, \dots, n-1$*

*Para  $j=i+1, \dots, n$*

*PRINT('OI')*

Note que os  $\{i, j\}$  formam exatamente **todos os pares** de números entre  $\{1, 2, \dots, n\}$ :

$\{1, 2\}, \{1, 3\} \dots, \{2, 3\}, \{2, 4\} \dots$

## Exemplo

Considere o trecho de código abaixo:

*Para  $i=1, \dots, n-1$*

*Para  $j=i+1, \dots, n$*

*PRINT('OI')*

Note que os  $\{i, j\}$  formam exatamente **todos os pares** de números entre  $\{1, 2, \dots, n\}$ :

$\{1, 2\}, \{1, 3\} \dots, \{2, 3\}, \{2, 4\} \dots$

O código imprime 1 OI para cada tal par

## Exemplo

Considere o trecho de código abaixo:

```
Para  $i=1, \dots, n-1$   
  Para  $j=i+1, \dots, n$   
    PRINT('OI')
```

Note que os  $\{i, j\}$  formam exatamente todos os pares de números entre  $\{1, 2, \dots, n\}$ :

$\{1, 2\}, \{1, 3\} \dots, \{2, 3\}, \{2, 4\} \dots$

O código imprime 1 OI para cada tal par

Portanto, imprime no total  $\binom{n}{2}$  OI's.

# Sparse Machine Learning

Um problema muito importante em Machine Learning é **seleção de atributos**



# Sparse Machine Learning

Um problema muito importante em Machine Learning é **seleção de atributos**

Suponha que um banco queira classificar seus clientes em bom/mal pagador (para um possível empréstimo)

# Sparse Machine Learning

Um problema muito importante em Machine Learning é **seleção de atributos**

Suponha que um banco queira classificar seus clientes em bom/mal pagador (para um possível empréstimo)

Para isso, tem **100 atributos** de cada cliente (idade, genero, renda, número de filhos, etc.)

# Sparse Machine Learning

Um problema muito importante em Machine Learning é **seleção de atributos**

Suponha que um banco queira classificar seus clientes em bom/mal pagador (para um possível empréstimo)

Para isso, tem **100 atributos** de cada cliente (idade, genero, renda, número de filhos, etc.)

Mas o algoritmo de classificação que o banco quer usar não funciona bem para tantos atributos (**overfitting**)

# Sparse Machine Learning

Um problema muito importante em Machine Learning é **seleção de atributos**

Suponha que um banco queira classificar seus clientes em bom/mal pagador (para um possível empréstimo)

Para isso, tem **100 atributos** de cada cliente (idade, genero, renda, número de filhos, etc.)

Mas o algoritmo de classificação que o banco quer usar não funciona bem para tantos atributos (**overfitting**)

O banco quer então rodar o algoritmo em todos os conjuntos de **10 atributos**, e retornar o melhor resultado

# Sparse Machine Learning

Um problema muito importante em Machine Learning é **seleção de atributos**

Suponha que um banco queira classificar seus clientes em bom/mal pagador (para um possível empréstimo)

Para isso, tem **100 atributos** de cada cliente (idade, genero, renda, número de filhos, etc.)

Mas o algoritmo de classificação que o banco quer usar não funciona bem para tantos atributos (**overfitting**)

O banco quer então rodar o algoritmo em todos os conjuntos de **10 atributos**, e retornar o melhor resultado

**Pergunta:** Quantas vezes o algoritmo será rodado?

# Sparse Machine Learning

Um problema muito importante em Machine Learning é **seleção de atributos**

Suponha que um banco queira classificar seus clientes em bom/mal pagador (para um possível empréstimo)

Para isso, tem **100 atributos** de cada cliente (idade, genero, renda, número de filhos, etc.)

Mas o algoritmo de classificação que o banco quer usar não funciona bem para tantos atributos (**overfitting**)

O banco quer então rodar o algoritmo em todos os conjuntos de **10 atributos**, e retornar o melhor resultado

**Pergunta:** Quantas vezes o algoritmo será rodado?  $\binom{100}{10}$   
(essa quantidade é gigantesca, tem  $\approx 20$  zeros)

# Exercícios

**Exercício 1.** Um comitê de 8 estudantes deve ser selecionado de uma turma de 19 calouros e 34 veteranos.

De quantas formas podem ser selecionados 3 calouros e 5 veteranos?

**Exercício 2.** Considere o trecho de código abaixo:

```
Para i=1,...n-2
  Para j=i+1,...n-1
    Para k=j+1,...n
      PRINT('OI')
```

Quantas vezes esse código imprime OI?