Estruturas Discretas 2017.2

Marco Molinaro

Conteúdo

Conceitos Básicos

Motivacao

- **Porque?** Demonstrar que determinado algoritmo funciona
- **Ex:**
  - Algoritmos de ordenacao
  - Algoritmos de criptografia
  - Algoritmos de caminho mais curto (*)
- (Em *Analise de Algoritmos* utilizaremos para analizar o quao "rapido" é um algoritmo)

Conceitos Básicos

- O primeiro passo para a resolução de um problema é defini-lo correta e precisamente. A formulação do problema envolve as seguintes questões:
  - *Qual o objeto (ou quais os objetos) em análise?*
  - *O que se deseja provar?*
- Hoje focaremos precisamente em como formular problemas
- (Na proxima aula falaremos de *provas*)

Teorema

- **Teorema:** proposição (ou resultado) que desejamos demonstrar

- Um teorema e dividido em duas partes:

  - **Hipótese:** Apresenta as informações sobre o objeto de prova, o que assumimos. Essas informações são tomadas como verdadeiras

  - **Tese:** E a parte do teorema que desejamos validar, a partir da hipótese, utilizando uma sequencia de argumentos formais.

$$\text{Hipótese} \Rightarrow \text{Tese}$$

Ex:

Teorema

$$\underbrace{\textit{Seja } n \textit{ um número inteiro primo maior que } 2.}_{\textit{Hipotese}} \textit{ Então } \underbrace{n \textit{ é ímpar.}}_{\textit{Tese}}$$

Teorema

Ex:

Teorema

$$\underbrace{\textit{Seja } n \textit{ um número inteiro primo maior que } 2.}_{Hipotese} \textit{ Então } \underbrace{n \textit{ é ímpar.}}_{Tese}$$

Teorema

$$\underbrace{\textit{Seja } n \textit{ um número inteiro. Se a soma dos digitos de } n \textit{ é divisivel por } 3}_{Hipotese}$$

$$\textit{Então } \underbrace{n \textit{ é divisivel por } 3.}_{Tese}$$

Teorema

Obs: Geralmente a hipotese é dada de forma implicita

Ex:

Teorema

A soma dos ângulos internos de um triangulo é 180 graus.

Obs: Geralmente a hipotese é dada de forma implicita

Ex:

Teorema

A soma dos ângulos internos de um triangulo é 180 graus.

(*Hipotese:* o objeto da prova é um triangulo; *Tese:* a soma de seus angulos é 180 graus)

Lema e Corolário

- Em alguma casos teoremas recebem nomes especiais

- Quando um teorema é utilizado para demonstrar um outro teorema, em geral mais complexo, ele recebe o nome de **Lema**

- Quando um teorema é uma consequência imediata de outro ele recebe o nome de **Corolário**.

Lema e Corolário

- Em alguma casos teoremas recebem nomes especiais
- Quando um teorema é utilizado para demonstrar um outro teorema, em geral mais complexo, ele recebe o nome de **Lema**
- Quando um teorema é uma consequência imediata de outro ele recebe o nome de **Corolário**.

Teorema

A soma dos ângulos internos de um triangulo é 180 graus.

Corolário

Cada angulo de um triangulo equilátero vale 60 graus.

Lema e Corolário

- Em alguma casos teoremas recebem nomes especiais
- Quando um teorema é utilizado para demonstrar um outro teorema, em geral mais complexo, ele recebe o nome de **Lema**
- Quando um teorema é uma consequência imediata de outro ele recebe o nome de **Corolário**.

Teorema

A soma dos ângulos internos de um triangulo é 180 graus.

Corolário

Cada angulo de um triangulo equilátero vale 60 graus.

(Essas distinções não são muito importantes para nós)

Proposição

- Uma **proposição** pode ser falsa ou verdadeira. Caso seja encontrada uma prova, ela se tornara um teorema

Proposição

Tudo numero múltiplo de 4 é múltiplo de 3

Proposição

Existem infinitas de triplas de naturais (x, y, z) *tais que* $x^2 + y^2 = z^2$

Proposição

O algoritmo Heapsort realiza no máximo $5n \log n$ *comparações para ordenar uma lista de* n *números*

Definições

- **Definição** é a enumeração das propriedades de um determinado objeto (ou coleção de objetos)

Definição

Um inteiro p é $\underbrace{\text{primo}}_{Objeto}$ *se e somente se*

for $\underbrace{\textit{divisível por exatamente quatro números: } 1, -1, p \textit{ e } -p.}_{Propriedades}$

Definições

- **Definição** é a enumeração das propriedades de um determinado objeto (ou coleção de objetos)

Definição

Um inteiro p é $\underbrace{\text{primo}}_{\textit{Objeto}}$ *se e somente se*

for $\underbrace{\textit{divisível por exatamente quatro números: } 1, -1, p \textit{ e } -p.}_{\textit{Propriedades}}$

Definição

O módulo $|r|$ *de um número real* r *é* r*, se* $r \geq 0$*, ou* $-r$*, se* $r < 0$.

Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.

Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.

- As vezes o mesmo objeto recebe duas diferentes definições. Quando isso ocorre, é necessário provar que as definições se equivalem.

Definições

- Toda definição é correta. Não há necessidade (ou maneira) de prová-la.

- As vezes o mesmo objeto recebe duas diferentes definições. Quando isso ocorre, é necessário provar que as definições se equivalem.

Ex:

Definição

Uma árvore é um grafo conexo cujo número de arestas é igual ao número de nós menos 1

Definição

Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos

Quantificadores

Pergunta: O seguinte teorema é "interessante"? Porque nao/sim?

Teorema

O número 5 é primo.

Quantificadores

Pergunta: O seguinte teorema é "interessante"? Porque nao/sim?

Teorema

O número 5 é primo.

Não é muito interessante: fala apenas de um número específico

Para falarmos de múltiplos objetos, precisamos de quantificadores

Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador "**todo**" é representado por $\forall$, e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador "**existe**" é denotado por $\exists$

Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador "**todo**" é representado por $\forall$, e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador "**existe**" é denotado por $\exists$

- **Obs:** Geralmente utilizamos quantificadores para elementos dentro de uma coleção espcífica de objetos
- **Ex:** "*para todo* número inteiro ..."; "*existe* uma função ..."

Quantificadores

- Temos 2 quantificadores:
- O quantificador "**todo**" é representado por $\forall$, e muitas vezes utilizamos o termo *qualquer que seja* em seu lugar
- O quantificador "**existe**" é denotado por $\exists$

- **Obs:** Geralmente utilizamos quantificadores para elementos dentro de uma coleção espcífica de objetos
- **Ex:** "*para todo* número inteiro ..."; "*existe* uma função ..."

Proposição

Todo *numero primo maior que 2 é impar.*

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Negacao: Frequentemente precisamos encontrar a **negação** de uma proposicao. Para isso, é fundamental entender o significado dos quantificadores:

Proposição

Toda *tripla de números inteiros* x, y *e* z *é tal que* $x^2 + y^2 \neq z^2$.

Quantificadores

Negacao: Frequentemente precisamos encontrar a **negação** de uma proposicao. Para isso, é fundamental entender o significado dos quantificadores:

Proposição

Toda *tripla de números inteiros* x, y *e* z *é tal que* $x^2 + y^2 \neq z^2$.

Proposição (negacao)

Existe *uma tripla de números inteiros* x, y *e* z *tal que* $x^2 + y^2 = z^2$.

Quantificadores

Negacao: Frequentemente precisamos encontrar a **negação** de uma proposicao.

Utilizamos "$\neg$" para denotar negacao

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Negacao: Frequentemente precisamos encontrar a **negação** de uma proposicao.

Utilizamos "$\neg$" para denotar negacao

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Proposição (negacao)

Existe *numero par* n, *tal que* ***pra todo*** *numero natural* k, $n \neq 2k$

Quantificadores

Porque negacao: Importante para provar/desprovar proposicao: basta desprovar/provar negacao. Outra perspectiva.

Quantificadores

Porque negacao: Importante para provar/desprovar proposicao: basta desprovar/provar negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

Todo *numero primo maior que 2 é par*

Quantificadores

Porque negacao: Importante para provar/desprovar proposicao: basta desprovar/provar negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

Todo *numero primo maior que 2 é par*

Resposta: É falsa: 3 é primo e não par

Quantificadores

Porque negacao: Importante para provar/desprovar proposicao: basta desprovar/provar negacao. Outra perspectiva.

Exemplo bobo: A seguinte proposicao é verdade? Como provar?

Proposição

Todo *numero primo maior que 2 é par*

Resposta: É falsa: 3 é primo e não par

O que voce acabou de mostrar é que a negacao da proposicao é verdadeira (entao a proposicao é falsa)

Proposição (negacao)

Existe *numero primo maior que 2 que é impar*

Quantificadores

Como **encontrar** a negacao de uma proposicao com quantificadores?

1. Entendendo o significado da proposicao, invertendo-o

Quantificadores

Como **encontrar** a negacao de uma proposicao com quantificadores?

1. Entendendo o significado da proposicao, invertendo-o
2. Forma **mecanica** (recap. logica)

Quantificadores

Como **encontrar** a negacao de uma proposicao com quantificadores?

1. Entendendo o significado da proposicao, invertendo-o
2. Forma **mecanica** (recap. logica)
   - $\neg\left[\forall x,\ \textbf{expressao}(x)\right]$ vira $\exists x,\ \neg\textbf{expressao}(x)$
   - $\neg[\exists x,\ \textbf{expressao}(x)]$ vira $\forall x,\ \neg\textbf{expressao}(x)$
   - (regras para "OU", "E", "implica")

Quantificadores

Exemplo: Aplique a forma mecanica para encontrar a negacao de proposicao abaixo

Proposição

Para todo *numero par* n*,* ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

Quantificadores

Exemplo: Aplique a forma mecanica para encontrar a negacao de proposicao abaixo

Proposição

Para todo *numero par n,* ***existe*** *numero natural k tal que $n = 2k$*

1. $\neg$ [**Para todo** numero par n, **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]

Quantificadores

Exemplo: Aplique a forma mecanica para encontrar a negacao de proposicao abaixo

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

1. $\neg$ [**Para todo** numero par n, **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
2. **Existe** numero par n tal que $\neg$ [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]

Quantificadores

Exemplo: Aplique a forma mecanica para encontrar a negacao de proposicao abaixo

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

1. $\neg$ [**Para todo** numero par n, **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
2. **Existe** numero par n tal que $\neg$ [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
3. **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k, $\neg[n = 2k]$

Exemplo: Aplique a forma mecanica para encontrar a negacao de proposicao abaixo

Proposição

Para todo *numero par* n, ***existe*** *numero natural* k *tal que* $n = 2k$

1. $\neg$ [**Para todo** numero par n, **existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
2. **Existe** numero par n tal que $\neg$ [**existe** numero natural k tal que $n = 2k$]
3. **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k, $\neg[n = 2k]$
4. **Existe** numero par n tal que **para todo** numero natural k, $n \neq 2k$

Quantificadores

Pergunta: Se trocarmos a **ordem** dos quantificadores, a proposicao continua a mesma?

Isso é, "$\forall x,\ \exists y,\ expressao$" é o mesmo que "$\exists y,\ \forall x,\ expressao$"?

Quantificadores

Pergunta: Se trocarmos a **ordem** dos quantificadores, a proposicao continua a mesma?

Isso é, "$\forall x,\ \exists y,\ expressao$" é o mesmo que "$\exists y,\ \forall x,\ expressao$"?

Nao! Por exemplo, considere conjuntos $A_1 = \{4, 5\}$ e $A_2 = \{5, 6\}$. A proposicao:

Proposição

Para todo $i \in \{1, 2\}$, *existe numero par* n *tal que* $n \in A_i$

é verdadeira, mas com a ordem trocada é falsa:

Proposição (ordem trocada)

Existe numero par n *tal que para todo* $i \in \{1, 2\}$, $n \in A_i$

Quantificadores

Ou seja, tem que ter cuidado com a ordem dos quantificadores

Quantificadores

Ou seja, tem que ter cuidado com a ordem dos quantificadores

Na verdade a ordem "$\forall x,\ \exists y$" é mais "fraca" que "$\exists y,\ \forall x$":

- Na primeira podemos pegar um y diferente pra cada x...
- mas na segunda, o mesmo y tem que funcionar para todos os x

Quantificadores

Ou seja, tem que ter cuidado com a ordem dos quantificadores

Na verdade a ordem "$\forall x,\ \exists y$" é mais "fraca" que "$\exists y,\ \forall x$":

- Na primeira podemos pegar um y diferente pra cada x...
- mas na segunda, o mesmo y tem que funcionar para todos os x

O teorema MINIMAX, essencialmente utilizado por John Nash em teoria de jogos, diz que em um caso especial podemos fazer essa troca

Exercícios

- **Exercício 1 -** Seja I um intervalo, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Reescreva as seguintes proposições utilizando quantificadores:

  a - A função f é constante

  b - A função f não é constante (*sem usar negacao*)

  c - A função f atinge o valor zero

Exercícios

- **Exercício 1 (solucao) -** Seja I um intervalo, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Reescreva as seguintes proposições utilizando quantificadores:

  a - A função f é constante
  $\exists v \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = v$

  b - A função f não é constante (*sem usar negacao*)
  $\forall v \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) \neq v$

  c - A função f atinge o valor zero
  $\exists x \in I,\ f(x) = 0$

Exercícios

- **Exercício 1 (solucao) -** Seja I um intervalo, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Reescreva as seguintes proposições utilizando quantificadores:

  a - A função f é constante
  $\exists v \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = v$

  b - A função f não é constante (*sem usar negacao*)
  $\forall v \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) \neq v$

  c - A função f atinge o valor zero
  $\exists x \in I,\ f(x) = 0$

- **Pergunta:** Na letra (a), obtemos a mesma proposicao se trocarmos a ordem "$\exists v \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = v$" por "$\forall x \in I, \exists v \in \mathbb{R},\ f(x) = v$"?

Exercícios

- **Exercício 1 (solucao) -** Seja I um intervalo, e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Reescreva as seguintes proposições utilizando quantificadores:

  a - A função f é constante
  $\exists v \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = v$

  b - A função f não é constante (*sem usar negacao*)
  $\forall v \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) \neq v$

  c - A função f atinge o valor zero
  $\exists x \in I,\ f(x) = 0$

- **Pergunta:** Na letra (a), obtemos a mesma proposicao se trocarmos a ordem "$\exists v \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = v$" por "$\forall x \in I,\ \exists v \in \mathbb{R},\ f(x) = v$"? Nao! A segunda prop. é **sempre** verdade, nao so quando f é constante.

- **Exercício 2 -** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Negue as seguintes proposições:

  a - $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$

  b - $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M.$

- **Exercício 2 (solucoes) -** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Negue as seguintes proposições:

  a - $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
  $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

  b - $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$
  (pra todo M, eventualmente f fica eternamente maior que M)
  $\exists M,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A,\ f(x) \leq M$
  (existe M tal que, mesmo olhando o quao longe quiser, existe ponto onde f é no máximo M)

Exercícios

- **Exercício 3 -** Determine se cada proposicao é verdadeira ou falsa

  a - $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

  b - $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

  c - $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

  d - $\exists a \in \mathbb{R}^*, \forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon$

  e - $\forall \epsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}^*, |a| < \epsilon$