Rio de Janeiro, 24 de Outubro de 2011.
LISTA DE ESTRUTURAS DISCRETAS
PROFESSOR: EDUARDO LABER
OBSERVAÇÕES: Exercícios marcados com $*$ são mais complicados.

# 1 Isomorfismo

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O complemento de $G$, denotado por $\overline{G}$, é o grafo simples com conjunto de vértices $V$ e conjunto de arestas $\overline{E} = \{xy | x, y \in V \text{ e } xy \notin E\}$. Um grafo simple é dito auto-complementar se for isomorfo a seu complementar.

   - Dê exemplo de um grafo simples, com 4 vértices, que seja auto complementar.
   - Dê exemplo de um grafo simples, com 5 vértices, que seja auto complementar.
   - Verifique que não há grafos auto complementares com 2 nem 3 vértices.
   - Quantas arestas deve ter um grafo auto complementar que possui $n$ vértices ?
   - Demonstre que se $G$ é um grafo auto complementar com $n$ vértices, então ou $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$, onde $k$ é um número inteiro positivo.

2. Exiba todos os grafos não-isomorfos simples com 4 vértices

# 2 Relação entre soma dos graus e número de arestas

1. Dado um grafo $G = (V, E)$, sejam $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o grau mínimo e máximo de $G$, respectivamente. Prove que

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

2. Mostre que um grafo simples com $n$ vértices e mais de $\frac{n(n-2)}{2}$ arestas é conexo.

3. Utilizamos $\Delta(G)$ para denotar o grau do vértice de maior grau em $G$. Determine se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando.

   a) Para todo grafo simples $G = (V, E)$, $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$, onde $v \in V$.

   b) Para todo grafo simples $G = (V, E)$, $\Delta(G - v) < \Delta(G)$, onde $v$ é o vértice de $G$ com maior grau.

   c) Para todo grafo simples $G = (V, E)$, $\Delta(G - v) \geq \Delta(G) - 1$, onde $v \in V$.

4. Em uma festa com 100 convidados, houveram 2008 apertos de mão. Sabendo que nenhum par de pessoas se cumprimentou mais de uma vez, podemos afirmar que alguem apertou a mão de pelo menos 41 pessoas?

5. *Seja $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto de pontos no plano tal que a distância entre quaisquer dois pontos é pelo menos 1. Mostre que há no máximo $3n$ pares de pontos com distância exatamente 1.

# 3 Caminhos, Ciclos e Conexidade

1. Mostre que todo grafo conexo com $n$ vértices e pelo menos $n$ arestas tem um ciclo.

2. Mostre que se $G$ é desconexo, então $\overline{G}$ (complemento de $G$) é conexo. Se necessário, veja a definição de grafo complementar no problema 1.

3. Sejam $P_1$ e $P_2$ os dois maiores caminhos em um grafo conexo $G$. Mostre que se $|P_1| = |P_2|$ então $P_1$ e $P_2$ tem um vértice em comum.

4. O diâmetro de um grafo $G$ é a maior distância[1] entre dois vértices de um grafo. Mostre que se $G$ tem diâmetro maior que 3, então $\overline{G}$ tem diâmetro menor que 3.

5. Mostre que se a aresta $e$ pertence a um trajeto fechado em $G$, então $e$ pertence a um ciclo de $G$.

6. *. Mostre que em uma festa com $n$ pessoas, onde cada pessoa conhece pelo menos 3, é possível colocar formar uma roda com pelo menos 4 pessoas de modo que cada pessoa conheça seus dois vizinhos.

7. Uma ponte em um grafo conexo $G = (V, E)$ é uma aresta $e$ tal $G - e$ não é conexo.

   a) Exiba um grafo conexo que contém uma ponte.

   b) Mostre que se uma aresta $e$ não é uma ponte em um grafo conexo $G$, então existe um ciclo em $G$ que contém $e$.

8. Uma cobertura por vértices para um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que toda aresta de $G$ incide em pelo menos um vértice de $C$. Um conjunto independente para $G$ é um conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que nenhum par de vértices de $S$ é vizinho em $G$. Mostre que o conjunto $X$ é uma cobertura para $G$ se e somente se $V - X$ é um conjunto independente para $G$.

[1] consulte a definição de distância apresentada em sala de aula

# 4 Árvores

1. Prove que toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos dois vértices com grau 1.

2. Existe uma árvore com $n$ vértices onde algum vértice tem grau $n-1$ ? Existe uma árvore com $n$ vértices onde dois vértices tem distância de $n-1$.

3. O centro de um grafo é um vértice $u$ tal que $\max_{v \in V(G)} d(u,v)$ é mínimo, onde $d(u,v)$ é a distância entre $u$ e $v$. Mostre que uma árvore tem exatamente 1 ou 2 centros.

4. Seja $G=(V,E)$ um grafo acíclico com $k$ componentes conexas. Mostre que $|E|=|V|-k$.

# 5 Trajetos Eulerianos

1. Considere o grafo G da Figura 1. Qual o número mínimo de arestas ( vértices não valem ) que devemos adicionar a G de modo que o novo grafo seja simples e tenha um trajeto Euleriano Fechado ? Justifique.

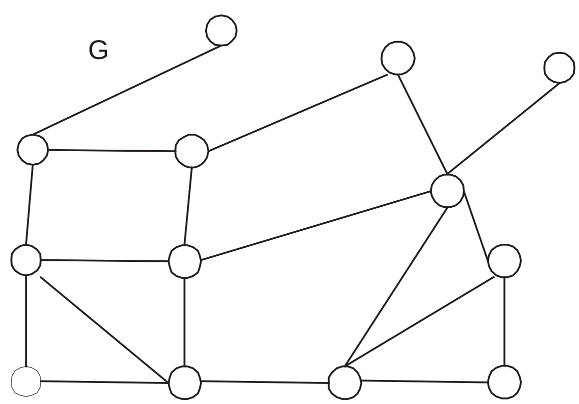


Figura 1:

2. Mostre que se um grafo direcionado tem um trajeto Euleriano, no máximo 2 vértices tem grau de entrada diferente do grau de saída.

3. Para quais valores de $r$ e $s$, o grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é Euleriano.?

## 6 Grafos Completos e Grafos Bipartidos

1. Mostre que se $G$ é simples e bipartido, então $|E(G)| \leq |V(G)|^2/4$.
2. Encontre o comprimento do menor ciclo em $K_{3,3}$
3. Determine o número de componentes conexas de $\overline{K}_{2,3}$ (complemento de $K_{2,3}$) e de $\overline{K}_n$
4. *Mostre que todo grafo simples $G$ contem um subgrafo bipartido gerador $H$ tal que $d_H(v) \geq d_G(v)/2$, onde $d_G(v)$ e $d_H(v)$ são, respectivamente, o grau de $v$ em $G$ e o grau de $v$ em $H$.
5. Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo. Seja $G$ um grafo bipartido com 11 vértices. O grafo $G$ admite um ciclo Hamiltoniano? Por que?

## 7 Grafos Direcionados

1. Mostre que um grafo direcionado $G = (V, E)$ é fortemente conexo se e somente se existe um vértice $v$ tal que $v$ alcança todos os vértices de $G$ e todos os vértices de $G$ alcançam $v$.
2. Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. Mostre que $G$ é fortemente conexo se e somente se para toda partição de $V$ em dois conjuntos não vazios $S$ e $T$, existe uma aresta de $S$ para $T$.
3. Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. Dizemos que $G$ é um torneio se para todo par de vértices $u, v$, com $u \neq v$, uma das condições vale: $(u, v) \in E$ ou $(v, u) \in E$. Responda as seguintes questões.

   a) *Mostre que todo torneio admite um caminho que passsa por todos os vértices do grafo apenas uma vez

   b) Exiba um torneio com 5 vértices que admite uma ordenação topológica.

## 8 Árvore Geradora de Custo Mínimo

1. Seja $T$ uma árvore geradora para um grafo $G$. Definimos como gargalo de $T$, o custo da aresta mais cara de $T$. Uma árvore geradora $T'$ para $G$ é uma árvore de gargalo mínimo se e somente se nenhuma árvore geradora para $G$ tem gargalo menor que $T'$. Responda as seguintes questões:

   (a) Toda árvore de gargalo mínimo é uma árvore geradora de custo mínimo? Prove ou dê um contra-exemplo

   (b) Toda árvore geradora de custo mínimo é uma árvore de gargalo mínimo? Prove ou dê um contra-exemplo

2. Seja $G = (V, E)$ um grafo completo e não direcionado com 5 vértices. Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Assuma que o custo da aresta que liga $i$ a $j$ é $i + j$ para todo $1 \leq i < j \leq 5$. Qual o custo da árvore geradora de custo mínimo para $G$?

3. Seja $G$ um grafo conexo com pesos positivos e distintos nas arestas. Seja $e$ a aresta mais cara de $G$. Sob quais condições a aresta $e$ pode pertencer a árvore geradora de custo mínimo de $G$?

# 9 Caminhos de Custo Mínimo

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo completo e não direcionado com 5 vértices. Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Assuma que o custo da aresta que liga $i$ a $j$ é $i + j$ para todo $1 \leq i < j \leq 5$. Qual o custo do caminho mais curto entre os vértice 1 e 5?

2. Seja $G$ um grafo direcionado com pesos positivos nas arestas e conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Sabemos que o caminho de peso mínimo entre os vértices 1 e 8 é $(1, 4, 2, 5, 7, 8)$. O que podemos afirmar sobre o caminho de peso mínimo entre os vértices 4 e 7?

# 10 Coloração de Vértices e de Arestas

1. Seja $T$ uma árvore cujo grau máximo é 7. Determine o número cromático e o índice cromático de $T$.

2. Seja um grafo simples $G$. Seja $c_1$ a cor que aparece mais vezes em uma coloração de arestas para $G$ e seja $n_1$ o número de arestas de cor $c_1$. Mostre que $n_1$ não excede $|V(G)|/2$.

3. Mostre que o número cromático de um grafo $G$ é maior ou igual ao número de vértices de qualquer subgrafo completo de $G$.