

## 1 Isomorfismo

- Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples. O complemento de  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo simples com conjunto de vértices  $V$  e conjunto de arestas  $\overline{E} = \{xy | x, y \in V \text{ e } xy \notin E\}$ . Um grafo simple é dito auto-complementar se for isomorfo a seu complementar.
  - Dê exemplo de um grafo simples, com 4 vértices, que seja auto complementar.
  - Dê exemplo de um grafo simples, com 5 vértices, que seja auto complementar.
  - Verifique que não há grafos auto complementares com 2 nem 3 vértices.
  - Quantas arestas deve ter um grafo auto complementar que possui  $n$  vértices ?
  - Demonstre que se  $G$  é um grafo auto complementar com  $n$  vértices, então ou  $n = 4k$  ou  $n = 4k + 1$ , onde  $k$  é um número inteiro positivo.
- Exiba todos os grafos não-isomorfos simples com 4 vértices

## 2 Relação entre soma dos graus e número de arestas

- Dado um grafo  $G = (V, E)$ , sejam  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$  o grau mínimo e máximo de  $G$ , respectivamente. Prove que

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

- Mostre que um grafo simples com  $n$  vértices e mais de  $\frac{n(n-2)}{2}$  arestas é conexo.
- Utilizamos  $\Delta(G)$  para denotar o grau do vértice de maior grau em  $G$ . Determine se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando.
  - Para todo grafo simples  $G = (V, E)$ ,  $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$ , onde  $v \in V$ .
  - Para todo grafo simples  $G = (V, E)$ ,  $\Delta(G - v) < \Delta(G)$ , onde  $v$  é o vértice de  $G$  com maior grau.
  - Para todo grafo simples  $G = (V, E)$ ,  $\Delta(G - v) \geq \Delta(G) - 1$ , onde  $v \in V$ .

4. Em uma festa com 100 convidados, houveram 2008 apertos de mão. Sabendo que nenhum par de pessoas se cumprimentou mais de uma vez, podemos afirmar que alguém apertou a mão de pelo menos 41 pessoas?
5. \*Seja  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  um conjunto de pontos no plano tal que a distância entre quaisquer dois pontos é pelo menos 1. Mostre que há no máximo  $3n$  pares de pontos com distância exatamente 1.

### 3 Caminhos, Ciclos e Conexidade

1. Mostre que todo grafo conexo com  $n$  vértices e pelo menos  $n$  arestas tem um ciclo.
2. Mostre que se  $G$  é desconexo, então  $\overline{G}$  (complemento de  $G$ ) é conexo. Se necessário, veja a definição de grafo complementar no problema 1.
3. Sejam  $P_1$  e  $P_2$  os dois maiores caminhos em um grafo conexo  $G$ . Mostre que se  $|P_1| = |P_2|$  então  $P_1$  e  $P_2$  tem um vértice em comum.
4. O diâmetro de um grafo  $G$  é a maior distância<sup>1</sup> entre dois vértices de um grafo. Mostre que se  $G$  tem diâmetro maior que 3, então  $\overline{G}$  tem diâmetro menor que 3.
5. Mostre que se a aresta  $e$  pertence a um trajeto fechado em  $G$ , então  $e$  pertence a um ciclo de  $G$ .
6. \*. Mostre que em uma festa com  $n$  pessoas, onde cada pessoa conhece pelo menos 3, é possível colocar formar uma roda com pelo menos 4 pessoas de modo que cada pessoa conheça seus dois vizinhos.
7. Uma ponte em um grafo conexo  $G = (V, E)$  é uma aresta  $e$  tal  $G - e$  não é conexo.
  - a) Exiba um grafo conexo que contém uma ponte.
  - b) Mostre que se uma aresta  $e$  não é uma ponte em um grafo conexo  $G$ , então existe um ciclo em  $G$  que contém  $e$ .
8. Uma cobertura por vértices para um grafo  $G = (V, E)$  é um conjunto de vértices  $C \subseteq V$  tal que toda aresta de  $G$  incide em pelo menos um vértice de  $C$ . Um conjunto independente para  $G$  é um conjunto de vértices  $S \subseteq V$  tal que nenhum par de vértices de  $S$  é vizinho em  $G$ . Mostre que o conjunto  $X$  é uma cobertura para  $G$  se e somente se  $V - X$  é um conjunto independente para  $G$ .

---

<sup>1</sup>consulte a definição de distância apresentada em sala de aula

## 4 Árvores

1. Prove que toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos dois vértices com grau 1.
2. Existe uma árvore com  $n$  vértices onde algum vértice tem grau  $n-1$ ?  
Existe uma árvore com  $n$  vértices onde dois vértices tem distância de  $n-1$ .
3. O centro de um grafo é um vértice  $u$  tal que  $\max_{v \in V(G)} d(u, v)$  é mínimo, onde  $d(u, v)$  é a distância entre  $u$  e  $v$ . Mostre que uma árvore tem exatamente 1 ou 2 centros.
4. Seja  $G = (V, E)$  um grafo acíclico com  $k$  componentes conexas. Mostre que  $|E| = |V| - k$ .

## 5 Trajetos Eulerianos

1. Considere o grafo  $G$  da Figura 1. Qual o número mínimo de arestas (vértices não valem) que devemos adicionar a  $G$  de modo que o novo grafo seja simples e tenha um trajeto Euleriano Fechado? Justifique.

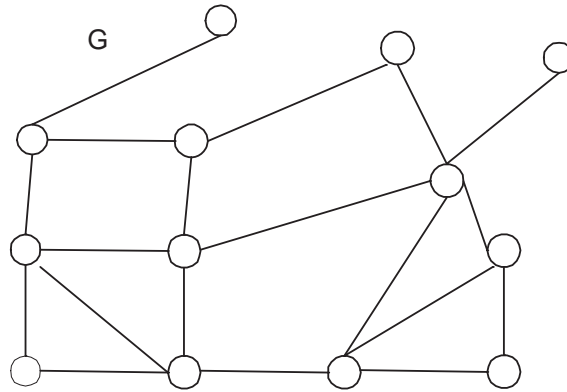


Figura 1:

2. Mostre que se um grafo direcionado tem um trajeto Euleriano, no máximo 2 vértices tem grau de entrada diferente do grau de saída.
3. Para quais valores de  $r$  e  $s$ , o grafo bipartido completo  $K_{r,s}$  é Euleriano?

## 6 Grafos Completos e Grafos Bipartidos

1. Mostre que se  $G$  é simples e bipartido, então  $|E(G)| \leq |V(G)|^2/4$ .
2. Encontre o comprimento do menor ciclo em  $K_{3,3}$
3. Determine o número de componentes conexas de  $\overline{K_{2,3}}$  (complemento de  $K_{2,3}$ ) e de  $\overline{K_n}$
4. \*Mostre que todo grafo simples  $G$  contém um subgrafo bipartido gerador  $H$  tal que  $d_H(v) \geq d_G(v)/2$ , onde  $d_G(v)$  e  $d_H(v)$  são, respectivamente, o grau de  $v$  em  $G$  e o grau de  $v$  em  $H$ .
5. Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo. Seja  $G$  um grafo bipartido com 11 vértices. O grafo  $G$  admite um ciclo Hamiltoniano? Por que?

## 7 Grafos Direcionados

1. Mostre que um grafo direcionado  $G = (V, E)$  é fortemente conexo se e somente se existe um vértice  $v$  tal que  $v$  alcança todos os vértices de  $G$  e todos os vértices de  $G$  alcançam  $v$ .
2. Seja  $G = (V, E)$  um grafo direcionado. Mostre que  $G$  é fortemente conexo se e somente se para toda partição de  $V$  em dois conjuntos não vazios  $S$  e  $T$ , existe uma aresta de  $S$  para  $T$ .
3. Seja  $G = (V, E)$  um grafo direcionado. Dizemos que  $G$  é um torneio se para todo par de vértices  $u, v$ , com  $u \neq v$ , uma das condições vale:  $(u, v) \in E$  ou  $(v, u) \in E$ . Responda as seguintes questões.
  - a) \*Mostre que todo torneio admite um caminho que passa por todos os vértices do grafo apenas uma vez
  - b) Exiba um torneio com 5 vértices que admite uma ordenação topológica.

## 8 Árvore Geradora de Custo Mínimo

1. Seja  $T$  uma árvore geradora para um grafo  $G$ . Definimos como gargalo de  $T$ , o custo da aresta mais cara de  $T$ . Uma árvore geradora  $T'$  para  $G$  é uma árvore de gargalo mínimo se e somente se nenhuma árvore geradora para  $G$  tem gargalo menor que  $T'$ . Responda as seguintes questões:
  - (a) Toda árvore de gargalo mínimo é uma árvore geradora de custo mínimo? Prove ou dê um contra-exemplo
  - (b) Toda árvore geradora de custo mínimo é uma árvore de gargalo mínimo? Prove ou dê um contra-exemplo

2. Seja  $G = (V, E)$  um grafo completo e não direcionado com 5 vértices. Seja  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Assuma que o custo da aresta que liga  $i$  a  $j$  é  $i + j$  para todo  $1 \leq i < j \leq 5$ . Qual o custo da árvore geradora de custo mínimo para  $G$ ?
3. Seja  $G$  um grafo conexo com pesos positivos e distintos nas arestas. Seja  $e$  a aresta mais cara de  $G$ . Sob quais condições a aresta  $e$  pode pertencer a árvore geradora de custo mínimo de  $G$ ?

## 9 Caminhos de Custo Mínimo

1. Seja  $G = (V, E)$  um grafo completo e não direcionado com 5 vértices. Seja  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Assuma que o custo da aresta que liga  $i$  a  $j$  é  $i + j$  para todo  $1 \leq i < j \leq 5$ . Qual o custo do caminho mais curto entre os vértices 1 e 5?
2. Seja  $G$  um grafo direcionado com pesos positivos nas arestas e conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Sabemos que o caminho de peso mínimo entre os vértices 1 e 8 é  $(1, 4, 2, 5, 7, 8)$ . O que podemos afirmar sobre o caminho de peso mínimo entre os vértices 4 e 7?

## 10 Coloração de Vértices e de Arestas

1. Seja  $T$  uma árvore cujo grau máximo é 7. Determine o número cromático e o índice cromático de  $T$ .
2. Seja um grafo simples  $G$ . Seja  $c_1$  a cor que aparece mais vezes em uma coloração de arestas para  $G$  e seja  $n_1$  o número de arestas de cor  $c_1$ . Mostre que  $n_1$  não excede  $|V(G)|/2$ .
3. Mostre que o número cromático de um grafo  $G$  é maior ou igual ao número de vértices de qualquer subgrafo completo de  $G$ .