Rio de Janeiro, 2 de Agosto de 2012.
LISTA DE CONTAGEM
EXERCÌCIOS MARCADOS COM * SÃO MAIS COMPLICADOS
PROFESSOR: EDUARDO LABER

1 Princípio Multiplicativo, Combinações e Permutações

1. Uma companhia aérea tem 6 pilotos e 10 aeromoças. Sabendo que cada tripulação é formada por 2 pilotos e 4 aeromoças, pergunta-se

   a) Quantas tripulações diferentes são possíveis?

   b) Sabendo que a companhia cobre 5 cidades, ou seja, há **um** vôo diário para cada par de cidades, podemos afirmar que ao final de um ano pelo menos uma tripulação terá voado junto mais de uma vez? Justifique.

2. Seja um tabuleiro de xadrez com casa numeradas de 1 a 64. De quantas maneiras podemos colocar 10 fichas idênticas no tabuleiro de modo a satisfazer simultaneamente as seguintes condições:

   (i) nenhuma casa tem mais de uma ficha

   (ii) pelo menos uma casa com número par tem uma ficha

   (iii) pelo menos uma casa com número impar tem uma ficha

3. O número N pode ser fatorado em $N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4}$, onde p_1, p_2, p_3 e p_4 são primos distintos. Quantos divisores tem N? Encontre o número de divisores de 1440.

4. Uma comissão internacional de direitos humanos será formada por presidentes de 6 paises. Sabendo que deve haver pelo menos um presidente de cada um dos cinco continentes na comissão. Quantas comissões são possíveis?

   Dados adicionais:

   Número de países da África com regime presidencialistas: a

   Número de países da América com regime presidencialistas: b

   Número de países da Ásia com regime presidencialistas: c

Número de países da Europa com regime presidencialistas: d

Número de países da Oceania com regime presidencialistas: e

Observação : A resposta deve ser dada em função de a,b,c,d,e

5. Quantas são as maneira de colocar n homens e n mulheres em uma fila de modo que duas pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

6. Em uma prova de múltipla escolha com 25 questões, onde cada questão tem cinco opções, qual é a probabilidade de um estudante não acertar nenhuma questão se ele 'chutar' todas?

7. Quantas subconjuntos de $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ de 6 elementos contém os elementos $3, 5$ e 7?

8. Em quantas permutações de $1, 2, ..., n$ os números 1 e 2 aparecem juntos?

2 Combinações com Repetição e Permutações com Repetição

1. Ache o número de soluções inteiras não negativas de

   a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$.

   b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$.

2. Suponha um campeonato de Futebol com 12 times. De quantas maneiras podemos organizar a primeira rodada, sabendo que cada time deve jogar exatamente uma vez?

3. Considere uma fila com 13 cadeiras numeradas de 1 a 13. Calcule o número de maneiras distintas em que João, Ana, Maria e Jose podem sentar nesta fila sem que dois deles fiquem em cadeiras vizinhas.

4. Quantas permutações da palavra PARALELEPIPEDO são possíveis?

5. De quantas maneiras podemos distribuir 23 balões idênticos entre 8 crianças ? De quantas maneiras podemos distribuir os mesmos 23 balões respeitando a condição de que cada criança deve receber pelo menos 2 balões?

3 Princípio da Inclusão e Exclusão

1. Quantos são os inteiros positivos menores que 1005 que não são divisíveis por 7, 11, 13 ou 18?

2. Encontre o número de permutações de 1, 2, 3, 4, 5 e 6 onde as sequências 123 e 56 não aparecem.

3. Quantos números entre 1 e 100000 tem soma dos dígitos igual a 9 e não contém o dígito 4 e nem o dígito 5?

4. Quantas cadeias de bits de tamanho 8 não contém 6 zeros consecutivos?

5. Encontre a quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 100 que são ímpares ou o quadrado de um inteiro.

6. Uma coleção M é definida recursivamente por:

   1. 2 e 7 pertencem a M.

   Se X e Y pertencem a M (X e Y podem ser iguais), então $X \cdot Y$ também pertence a M.

   Quantos números do conjunto $\{1, 2, ..., 100\}$ pertencem a M?

7. Quantos números entre 1 e 1.000.000 têm a soma dos seus algarismos igual a 23?

4 Princípio da Casa dos Pombos

1. (*).Prove que todo subconjunto de $\{1, 2, ..., 2n\}$ com n+1 elementos contém um par de elementos tal que um seja divisor do outro.

2. Considere 5 pontos no plano: $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3), z_4 = (x_4, y_4), z_5 = (x_5, y_5)$, onde $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ são números inteiros. Mostre que dentre estes 5 pontos existe um par tal que o ponto médio do segmento determinado por eles tem coordenadas inteiras.

3. Considere um quadrado de lado 4. Mostre que se colocarmos 5 pontos dentro do quadrado, existirão dois pontos a uma distância menor ou igual a 3. (**sugestão** divida o quadrado em 4 partes iguais)

4. Prove que se 11 números distintos são selecionados do conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$, então a seleção contém inteiros a e b tal que $a - b = 2$.

5. Qual é o menor número de estudantes que se deve ter em um curso para garantir que pelo menos 6 irão receber a mesma nota, sabendo que as possíveis notas são A, B, C, D e E?

6. Considere uma prova de múltipla escolha com 10 questões, aonde cada questão tem 3 respostas possíveis: A, B ou C. Qual é o menor número de estudantes que deve fazer a prova para que possamos afirmar que 4 deles vão responder todas as questões da mesma forma?