Rio de Janeiro, 2 de Agosto de 2012.

LISTA DE CONTAGEM

EXERCÌCIOS MARCADOS COM * SÃO MAIS COMPLICADOS

PROFESSOR: EDUARDO LABER

1 Princípio Multiplicativo, Combinações e Permutações

1. 4. (a) $\binom{6}{2}\binom{10}{4} = 3150$.

   b) Sim, porque o número de voôs é $10 \times 365 = 3650$, que é maior que o número de tripulações possíveis.

2. $\binom{64}{10} - 2.\binom{32}{10}$

3. O total de divisores de N é $(k_1 + 1)((k_2 + 1)(k_3 + 1)(k_4 + 1)$. Como 1440 $=2^5.3^2.5$, então o total de divisores é $6.3.2 = 36$.

4. $\binom{a}{2}bcde + \binom{b}{2}acde + \binom{c}{2}abde + \binom{d}{2}abce + \binom{e}{2}abcd$

5. $2 \times (n!)^2$

6. $\frac{4^{25}}{5^{25}}$

7. $\binom{7}{3}$

8. $2 \times (n - 1)!$

2 Combinações com Repetição e Permutações com Repetição

1. Utilizando a técnica dos palitos e asteriscos.

   a) $\frac{8!}{3!5!}$

   b) $\frac{9!}{4!5!}$

2. $\frac{C_2^{12}C_2^{10}C_2^{8}C_2^{6}C_2^{4}C_2^{2}}{6!}$

3. Utilize a técnica dos palitos e $*$. $\frac{10!}{6!4!}$.

4. $\frac{14!}{3!2!3!2!}$

5. a) $\frac{30!}{23!7!}$ e b) $\frac{14!}{7!7!}$

3 Princípio da Inclusão e Exclusão

1. Utilize o princípio de inclusão e exclusão. Defina quatro conjuntos: $A_1 = \{$ números divísiveis por 7 menores que 1004 $\}$, $A_2 = \{$ números divísiveis por 11 menores que 1004 $\}$, $A_3 = \{$ números divísiveis por 13 menores que 1004 $\}$ e $A_4 = \{$ números divísiveis por 18 menores que 1004 $\}$. A resposta é dada por $1004 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$

2. Utilize o princípio de inclusão e exclusão. Defina o conjunto das permutação de 1,2,3,4,5 e 6 que a sequência 123 aparece e o conjunto das permutações de 1,2,3,4,5 e 6 que as sequência 56 aparece.

3. Utilize a técnica dos palitos e $*$ junto com o princípio de união e exclusão.

4. Utilize o princípio de união e exclusão. Defina os conjuntos A_1, A_2, A_3, aonde $A_1 = \{$ sequência de 8 bits em que os 6 primeiros bits são 0 $\}$, $A_2 = \{$ sequência de 8 bits em que os os bits 2,3,4,5,6,7 são 0 $\}$ e $A_3 = \{$ sequência de 8 bits em que os os últimos 6 bits são 0 $\}$. A resposta é dada pelo numero sequências de 8 bits menos a cardinalidade do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

5.

6. 13 números

7.

4 Princípio da Casa dos Pombos

1. (*) Sugestão: use o fato que todo número natural pode ser escrito como $2^p \times I$, onde p é um número inteiro maior igual a 0 e I é um número ímpar. A partir de então crie casas de pombos de modo que número com mesmo I na sua representação sejam alocados na mesma casa.

2. Utilize o princípio da casa dos pombos e o fato que o ponto médio entre o par de pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado por $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$. Além disso, utilize o fato de que cada número inteiro só pode ser par ou ímpar.

3. Considere um quadrado de lado 4. Mostre que se colocarmos 5 pontos dentro do quadrado, existirão dois pontos a uma distância menor ou igual a 3. (**sugestão** divida o quadrado em 4 partes iguais)

4. Seja $n_1 < n_2 < \ldots < n_{11}$ as sequência dos 11 números escolhidos do conjunto $\{1, \ldots, 20\}$ em ordem crescente. Sejam $G_1, G_2, \ldots, G_k$ os grupos formados agrupando os números consecutivos da sequência. Por exemplo, se a sequência escolhida for $(1, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 14, 17, 18, 20)$, então $G_1 = (1)$, $G_2 = (3, 4, 5)$, $G_3 = (8, 9)$, $G_4 = (12)$,$\mathrm{G}_5 = (14)$,$G_6 = (17, 18)$ e $G_7 = (20)$. Vamos considerar dois casos:

   Caso 1) O número k de grupos obtidos é menor ou igual a 5. Neste caso, pelo princípio da casa dos pombos, existirá algum grupo G com pelo menos 3 números consecutivos e, portanto, dois elementos deste grupo terão diferença de 2.

   Caso 2) O número k de grupos obtidos é maior ou igual a 6. Seja M o conjunto dos números não escolhidos. Vamos criar $k - 1$ casas de pombos, a primeira casa para os números de M que são maiores que o maior número de G_1 e menores que o menor de G_2; a segunda para os números de M que são maiores que o maior número de G_2 e menores que o menor de G_3, e assim por diante, até a casa $k-1$ para os os números de M que são maiores que o maior número de G_{k-1} e menores que o menor de G_k. Note que cada uma das casas tem que ter pelo menos um elemento de M, caso contrário poderíamos juntar dois grupos de números consecutivos. De fato, utilizando um princípio análogo ao da casa dos pombos podemos afirmar que uma das casas conterá exatamente um número do conjunto M já que M tem 9 elementos e o número de casas criadas é pelo menos 5. Seja i uma casa que recebe exatamente um número de M. Temos que o menor elemento do grupo G_{i+1} é duas unidades maior que que o maior número do grupo G_i.

5. 26 estudantes.

6. Existem 3^{10} maneira de responder a prova. Para garantir que 4 respondam da mesma forma, são necessários pelo menos $3 \times 3^{10} + 1$ estudantes.