

## Lista de Exercícios 2

**Pergunta 1.** Dado um grafo conexo e não direcionado  $G = (V, E)$ , explique como seria um algoritmo para decidir se existe ou não uma aresta em  $E$  tal que a sua remoção não desconecta o grafo. Analise a complexidade do algoritmo proposto. Quanto mais eficiente a solução, melhor.

**Pergunta 2.** Em um grafo bipartido completo, todos os vértices de uma partição são ligados a todos os vértices da outra. Qual é a altura da árvore gerada por uma BFS em um grafo bipartido completo? Qual é a altura da árvore gerada por uma DFS em um grafo bipartido completo?

**Pergunta 3.** Seja  $G$  um grafo direcionado com pesos positivos nas arestas, seja  $s$  um vértice de  $G$  e seja  $k$  um inteiro positivo. Como podemos encontrar os  $k$  vértices mais próximos de  $s$ ? Com qual complexidade? Analise em função de  $k, m, n$  ( $n$  = número de nós,  $m$  = número de arestas).

**Pergunta 4.** Um site de música na Internet decidiu criar um ranking com as melhores canções da última década, a partir de  $n$  canções,  $s_1, \dots, s_n$ , pré-selecionadas. Durante um mês, sempre que um usuário acessava o site, duas canções escolhidas aleatoriamente eram exibidas, e o usuário devia marcar qual das duas ele preferia. Ao término deste processo, temos um conjunto de triplas  $S = \{(s_i, s_j, d_{ij}) | 1 \leq i < j \leq n\}$ , aonde  $d_{ij} = i$  se a maioria das pessoas prefere  $s_i$  à  $s_j$ ,  $d_{ij} = j$  se a maioria das pessoas prefere  $s_j$  à  $s_i$  e  $d_{ij} = 0$  se não há uma preferência entre as canções. Um ranking  $R$  é consistente com a lista  $S$  se e somente se para todo par de canções  $s_i$  e  $s_j$  a seguinte condição é válida: se  $s_i$  vem antes da canção  $s_j$  no ranking  $R$ , então a maioria das pessoas prefere  $s_i$  à  $s_j$  ou não há uma preferência entre tais canções.

- a) Descreva um algoritmo eficiente para verificar se é possível criar um ranking de canções consistente com a pesquisa. Note que o algoritmo deve responder SIM ou NÃO. Analise a complexidade de pior caso do algoritmo proposto em função de  $n$ . Explique as estruturas de dados utilizadas para obter tal complexidade.
- b) Em algumas situações é possível existir mais de um ranking consistente com  $S$ . Dado dois rankings  $R$  e  $R'$  para uma lista  $S$ , dizemos que  $R$  domina  $R'$  se e somente se na primeira posição que  $R$  difere de  $R'$  o índice da canção de  $R$  é menor que o índice da canção de  $R'$ . Por exemplo, se  $R = s_1s_3s_2s_4$  e  $R' = s_1s_3s_4s_2$ , então  $R$  domina  $R'$  já que os rankings diferem pela primeira vez na terceira posição e  $s_2$  tem índice menor que  $s_4$ . Descreva como seria um algoritmo para determinar um ranking consistente com a lista  $S$  que não é dominado por nenhum outro ranking consistente com  $S$ . Analise a complexidade do algoritmo proposto em função de  $n$ . Explique as estruturas de dados utilizadas para obter tal complexidade.

**Pergunta 5.** The police department in the city of Computopia has made all streets one-way. The mayor contends that there is still a way to drive legally from any intersection in the city to any other intersection, but the opposition is not convinced. A computer program is needed to determine whether the mayor is right. However, the city elections are coming up soon, and there is just enough time to run a *linear-time* algorithm.

- a) Formulate this problem graph-theoretically, and explain why it can indeed be solved in linear time.

**Pergunta 6.** Seja um grafo não direcionado  $G = (V, E)$ . Uma cobertura para  $G$  é um conjunto de vértices  $C \subseteq V$  tal que toda aresta de  $E$  tem pelo menos uma extremidade em  $C$ . Considere o seguinte algoritmo guloso.

```

procedure GULOSO( $V, E$ )
   $C \leftarrow \emptyset$ 
   $G' \leftarrow G$ 
  while  $G'$  possuir arestas do
     $v \leftarrow$  vértice de  $G'$  com maior grau
     $C \leftarrow C \cup v$ 
     $G' \leftarrow G' - v$ 
  end while
  return  $C$ 
end procedure

```

Diga como implementar esse algoritmo de forma eficiente (ou seja, diga as estruturas de dados utilizadas, etc.) e analise sua complexidade.

**Pergunta 7.** Considere o seguinte problema clássico de travessia da raposa, galinha e saco de feijão: Um fazendeiro tem uma raposa, uma galinha e um saco de feijão que ele quer atravessar de um lado para o outro do rio. Seu barco só comporta o fazendeiro de mais um item. A raposa não pode ficar sozinha com a galinha em momento nenhum, e a galinha também não pode ficar sozinha com o saco de feijão.

Modele esse problema utilizando um grafo e dê um algoritmo que encontra uma sequência de movimentos que permite transportar as posses do fazendeiro de um lado para o outro do rio.

**Pergunta 8.** Considere um grafo direcionado acíclico onde cada aresta  $e$  tem um tamanho  $w_e$ . Dado dois vértices  $u, v$  no grafo, compute o caminho **mais longo** entre eles em tempo  $O(n + m)$ .

#### EXERCÍCIOS DO LIVRO

- Capítulo 3 Kleinberg-Tardos, exercícios: 1, 2, 4, 6, 8, 10 12.