Cota inferior problema com 3 For's

O algoritmo que queremos analisar é o seguinte:

$x \leftarrow 0$
Para $i \leftarrow 1$ até n faça
    Para $j \leftarrow i + 1$ até n faça
        Para $k \leftarrow 1$ até $j - i$ faça
            $x \leftarrow x + 1$

Vamos provar que esse algoritmo é $\Omega(n^3)$. Pra isso, primeiro exprimi-lo como um somatorio: seu custo é igual a

$$\text{custo algoritmo} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=1}^{j-i} c$$

para alguma constante c. Vamos entao provar que esse somatorio é pelo menos $\Omega(n^3)$ usando o metodo da metade: Pra resolver o for/somatorio de dentro:

$$\begin{aligned}
\text{custo algoritmo} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=1}^{j-i} c && \text{(vamos aplicar o metodo da metade)} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{(c + c + \ldots + c)}_{(j-i)/2 \text{ termos}} && \text{(tem } (j-i)/2 \text{ termos, ou seja, metade)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} c \cdot \frac{j-i}{2}.
\end{aligned}$$

Alias, pra esse primeiro somatorio temos ate uma formula exata pra ele, nem precisamos usar o metodo da metade: ele é igual a $c \cdot (j - i)$.

Continuando, agora resolvemos o proximo somatorio, em j, usando o metodo da metade. Eu acho mais facil expandir o somatorio pra ver o que esta acontecendo conforme rola esse For $j =$

$i+1, j=i+2, ..., j=n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} c\cdot(j-i)/2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[c\cdot\frac{(i+1)-i}{2}+c\cdot\frac{(i+2)-i}{2}+c\cdot\frac{(i+3)-i}{2}+\ldots+c\cdot\frac{(n-1)-i}{2}+c\cdot\frac{n-i}{2}\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[c\cdot\frac{1}{2}+c\cdot\frac{2}{2}+c\cdot\frac{3}{2}+\ldots+c\cdot\frac{n-i-1}{2}+c\cdot\frac{n-i}{2}\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{2}\cdot[1+2+3+...+(n-i-1)+(n-i)].$$

(só botando em evidencia $c/2$, pra ficar mais limpo)

Note que agora que expandimos esse somatorio, o j desapareceu! Agora note que tem $n-i$ termos o somatorio de dentro; poderiamos usar a formula da PA, mas vamos fazer pelo metodo da metade: vamos ficar com os maiores $(n-i)/2$ termos, que estao mais a direita, e sao $(n-i)/2+((n-i)/2+1)+((n-i)/2+2)+...+((n-i)/2+(n-i)/2))$ (alias esse ultimo é $(n-i)$). Substituindo isso na ultima expressao temos que o nosso somatorio é

$$\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{2}\cdot\left[\frac{n-i}{2}+\left(\frac{n-i}{2}+1\right)+\left(\frac{n-i}{2}+2\right)+\ldots+\left(\frac{n-i}{2}+\frac{n-i}{2}\right)\right]$$
$$\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{2}\cdot\left[\frac{n-i}{2}+\frac{n-i}{2}+\ldots+\frac{n-i}{2}+\frac{n-i}{2}\right]$$

(jogando os termos para o minimo, continuando no metodo da metade)

$$\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{2}\cdot\frac{n-i}{2}\cdot\frac{n-i}{2}$$

(porque temos $(n-i)/2$ termos)

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{2}\cdot\frac{(n-i)^2}{4}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{8}\cdot(n-i)^2.$$

(so agrupei os denominadores 2 e 4)

Agora resolvemos da mesma forma o ultimo somatorio, em i, expandindo e usando o metodo da metade:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \frac{c}{8} \cdot (n-i)^2 \\
&= \frac{c}{8} \cdot \left[(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \ldots + (n-(n-1))^2 + (n-n)^2 \right] \\
&\geq \frac{c}{8} \cdot \left[(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \ldots + (n-(n/2))^2 \right] \\
&\hspace{20em} \text{(fiquei com a metade maior, temos agora } n/2 \text{ termos)} \\
&\geq \frac{c}{8} \cdot \left[(n-(n/2))^2 + \ldots + (n-(n/2))^2 \right] \qquad \text{(joquei todos eles para o menos desses termos)} \\
&= \frac{c}{8} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-(n/2))^2 \\
&= \frac{c}{8} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n/2)^2 \\
&= \frac{c}{64} \cdot n^3.
\end{aligned}
$$

Ou seja, com isso finalmente provamos que esse somatorio 'e $\Omega(n^3)$!