

Algoritmos Aleatorizados

Desigualdades de cauda

Como dar uma cota para a probabilidade de uma variável aleatória se afastar da média?

**Randomized Algorithms, seções 3.1, 3.2 e aula
4.1**

Desigualdade de Markov

Seja y uma V.A. que assume somente valores não negativos. Então,

$$\forall_{t \in \mathbb{R}^+} \Pr[y \geq t] \leq \frac{E[y]}{t}$$

Prova:

$$E[y] \geq \int_t^{\infty} x \cdot \Pr[y = x] dx \geq \Pr[y \geq t] \cdot t$$

Variância de uma distribuição

A variância de uma variável aleatória X é definida como

$$\text{Var}(x) = E[(X - \mu_x)^2], \text{ onde } \mu_x = E[X],$$

- A variância mede o quanto a distribuição "foge" da média.
- O Desvio padrão de X , σ_x , é a raiz quadrada da variância

Variância de uma distribuição

Lema: Se x e y são V.A.s independentes, então

$$\text{Var}(x+y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y)$$

Desigualdade de Chebyshev

Seja X uma V.A. com valor esperado μ_x e desvio padrão σ_x . Então,

$$\forall_{t \in \mathbb{R}^+} \Pr[|x - \mu_x| \geq t \cdot \sigma_x] \leq \frac{1}{t^2}$$

Prova:

- $\Pr[|x - \mu_x| \geq t \cdot \sigma_x] = \Pr[|x - \mu_x|^2 \geq t^2 \cdot \sigma_x^2]$
- Se $y = (x - \mu_x)^2$, por Markov temos,
$$\Pr[|x - \mu_x|^2 \geq t^2 \text{Var}(X)] \leq \text{Var}(X) / (t^2 \text{Var}(X)) = 1 / t^2$$

Desigualdade de Chebyshev

Qual é a probabilidade obtermos mais de 60 caras ao jogar uma moeda justa 100 vezes ?

X : número de vezes que o resultado é cara

X_i :1 se o resultado da i -ésima tentativa é cara e 0 caso contrário

$$E[X] = \sum_{i=1}^{100} X_i = 50 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{100} \text{Var}(X_i) = 25$$

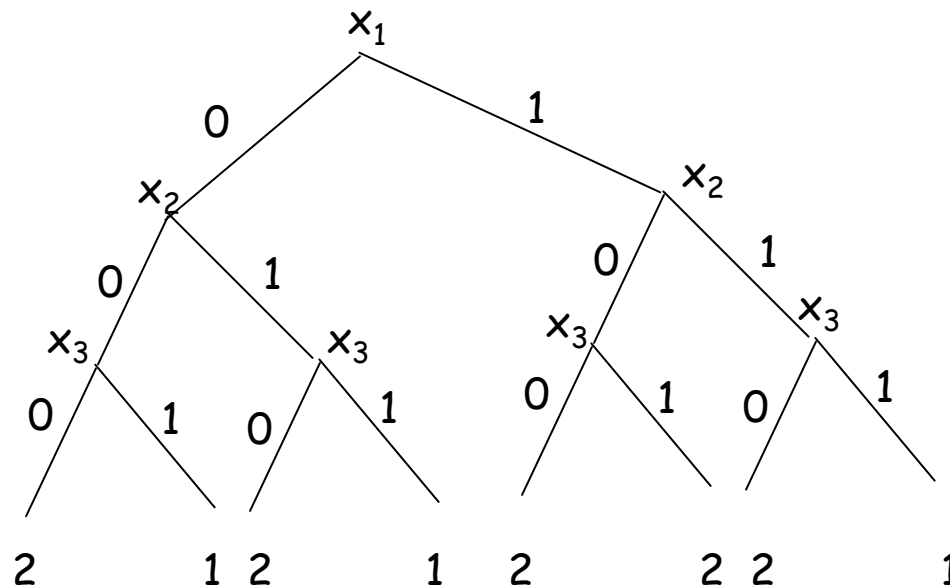
Aplicando Chebyshev temos

$$\Pr[|X-50| > 2 \times 5] \leq 1/4 \Rightarrow \Pr[X > 60] \leq 1/8$$

MAX SAT: Desaleatorização 5.6

$$C_1 = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

$$C_2 = (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

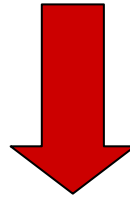


- Cada folha da árvore corresponde a um atribuição:
- Cada folha esta associada ao número de clausulas satisfeitas pela atribuição correspondente

MAX SAT: Desaleatorização

Método das Probabilidades Condicionais

$$E[X] = 1/2 \cdot E[X|x_1=1] + 1/2 \cdot E[X|x_1=0] = 7/8 k$$



- (i) $E[X|x_1=1] \geq 7/8k$ ou
- (ii) $E[X|x_1=0] \geq 7/8k$

Se (i) fixamos $x_1=1$, caso contrário fixamos $x_1=0$.

Consideramos x_2 recursivamente e decemos até chegar uma folha