Rio de Janeiro, 24 de Outubro de 2011.
LISTA DE ESTRUTURAS DISCRETAS
PROFESSOR: EDUARDO LABER
OBSERVAÇÕES: Exercícios marcados com $*$ são mais complicados.

1 Isomorfismo

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O complemento de G, denotado por $\overline{G}$, é o grafo simples com conjunto de vértices V e conjunto de arestas $\overline{E} = \{xy | x, y \in V \text{ } e \text{ } xy \notin E\}$. Um grafo simples é dito auto-complementar se for isomorfo a seu complementar.

   - Dê exemplo de um grafo simples, com 4 vértices, que seja auto complementar.
   - Dê exemplo de um grafo simples, com 5 vértices, que seja auto complementar.
   - Verifique que não há grafos auto complementares com 2 nem 3 vértices.
   - Quantas arestas deve ter um grafo auto complementar que possui n vértices ?
   - Demonstre que se G é um grafo auto complementar com n vértices, então ou $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$, onde k é um número inteiro positivo.

   Sugestão Utilize o fato que se G é um grafo auto-complementar então G e seu complementar tem $n(n-1)/4$ arestas aonde n é o número de vértices de G.

2. Exiba todos os grafos não-isomorfos simples com 4 vértices

2 Relação entre soma dos graus e número de arestas

1. Dado um grafo $G = (V, E)$, sejam $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o grau mínimo e máximo de G, respectivamente. Prove que

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

   Solução Temos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$. Como $\delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G)$ para todo $v \in V$, temos que $|V|\delta(G) \leq 2|E| \leq |V|\Delta(G)$. Portanto,

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

2. Mostre que um grafo simples com n vértices e mais de $\frac{n(n-2)}{2}$ arestas é conexo.

   Solução. Segue do exercício anterior que o grau máximo deste grafo é maior que $2\frac{n(n-2)}{2n} = n-2$. Logo, este grafo tem pelo menos um vértice v com grau $n-1$. Isso quer dizer que v é ligado a todos demais vértices. Portanto, existe um caminho entre todo par de vértices x, y. Basta ir de x para v e depois de v para y.

3. Utilizamos $\Delta(G)$ para denotar o grau do vértice de maior grau em G. Determine se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando.

   a) Para todo grafo simples $G = (V, E)$, $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$, onde $v \in V$.

   b) Para todo grafo simples $G = (V, E)$, $\Delta(G - v) < \Delta(G)$, onde v é o vértice de G com maior grau.

   c) Para todo grafo simples $G = (V, E)$, $\Delta(G - v) \geq \Delta(G) - 1$, onde $v \in V$.

   Solução.

   a) Sim. Ao remover um vértice do grafo não aumentamos o grau de nenhum outro.

   b) Não. Seja $G = (V, E)$, aonde $V = \{a, b, c, d\}$ e $E = \{ab, bc, cd, da\}$. Todos os vértices tem grau 2. Retirando qualquer vértice ainda temos um vértice com grau máximo 2.

   c) Não. Seja $G = (V, E)$, aonde $V = \{a, b, c\}$ e $E = \{ab, bc\}$. Ao remover b do grafo obtemos um novo grafo com grau máximo 0.

4. Em uma festa com 100 convidados, houveram 2008 apertos de mão. Sabendo que nenhum par de pessoas se cumprimentou mais de uma vez, podemos afirmar que alguém apertou a mão de pelo menos 41 pessoas?

   Solução. Podemos enxergar esta festa como um grafo aonde cada vértice corresponde a uma pessoa e cada aperto de mão a uma aresta. Em termos do grafo, a pergunta é se existe algum vértice de grau maior ou igual a 41. Aplicando o resultado do primeiro exercício desta seção concluímos que o grau máximo deste grafo é maior ou igual a $\frac{2\times 2008}{100} = 40.16$. Como o grau máximo tem que ser um número inteiro concluímos que ele é pelo menos 41.

5. *Seja $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto de pontos no plano tal que a distância entre quaisquer dois pontos é pelo menos 1. Mostre que há no máximo $3n$ pares de pontos com distância exatamente 1.

   Sugestão. Construa um grafo cujos vértices são os n pontos e as arestas ligam pontos que estão a distância 1. Argumente que o grau máximo que um vértice pode ter é 6. A partir de então utilize a relação entre o número de arestas e a soma dos graus dos vértices para mostrar que o número de arestas no máximo $3n$.

3 Caminhos, Ciclos e Conexidade

1. Mostre que todo grafo conexo com n vértices e pelo menos n arestas tem um ciclo.

   Sugestão A prova utiliza indução em n. Para $n = 1$ o resultado é verdadeiro já que um grafo com um vértice e pelo menos 1 aresta contém um laço.

   Vamos assumir, como hipótese de indução, que o resultado é válido para k e provar que ele continua válido para $k+1$. Seja um grafo G com $k+1$ vértices e pelo menos $k+1$ arestas. Seja $e = uv$ uma aresta de G. Consideramos dois casos:

   Caso 1) $G - e$ é conexo. Neste caso seja P um caminho entre u e v em $G - e$. Logo $P + e$ é um ciclo de G.

   Caso 2) $G - e$ não é conexo. Neste caso seja $G_1, G_2, \ldots, G_k$ as componentes conexas de $G - e$. Como a diferença entre o número de vértices e o número de arestas em $G - e$ é no máximo 1, tem que existir uma componente G_i tal que $|E(G_i)| \geq |V(G_i)|$. Pela hipótese de indução G_i tem um ciclo e, portanto, G tem um ciclo.

2. Mostre que se G é desconexo, então $\overline{G}$ (complemento de G) é conexo. Se necessário, veja a definição de grafo complementar no problema 1.

   Solução Sejam u e v dois vértices de G. Dividimos a argumentação em dois casos:

   Caso 1) Não existe aresta entre u e v em G. Então segue da definição de $\overline{G}$ que existe aresta entre eles em $\overline{G}$.

   Caso 2) Existe aresta entre u e v em G. Neste caso u e v estão na mesma componente conexa em G. Seja w um vértice em outra componente conexa em G. Este vértice tem que existir, caso contrário G seria conexo. Portanto, não existe aresta ligando u a w em G nem v a w em G. Concluímos então que as arestas uw e vw pertencem a $\overline{G}$. Segue que uwv é um caminho ente u e v em $\overline{G}$.

3. Sejam P_1 e P_2 os dois maiores caminhos em um grafo conexo G. Mostre que se $|P_1| = |P_2|$ então P_1 e P_2 tem um vértice em comum.

4. O diâmetro de um grafo G é a maior distância[1] entre dois vértices de um grafo. Mostre que se G tem diâmetro maior que 3, então $\overline{G}$ tem diâmetro menor que 3.

   Sugestão Tente mostrar que a distância entre quaisquer dois vértices de $\overline{G}$ é no máximo 2. Considere o caso em que não existe aresta entre u e v

[1] consulte a definição de distância apresentada em sala de aula

em G e, também, o caso em que a aresta existe. Para resolver o segundo caso tente mostrar que existe um vértice w em G tal que w não está ligado a u nem a v.

5. Mostre que se a aresta e pertence a um trajeto fechado em G, então e pertence a um ciclo de G.

6. *. Mostre que em uma festa com n pessoas, onde cada pessoa conhece pelo menos 3, é possível colocar formar uma roda com pelo menos 4 pessoas de modo que cada pessoa conheça seus dois vizinhos.

   Solução Considere um grafo com n vértices aonde cada vértice corresponde a uma pessoa e existe uma aresta entre duas pessoas se elas se conhecem. Em termos do grafo, o objetivo é mostrar que existe um ciclo de comprimento maior ou igual a 4.

   Seja $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ um caminho de comprimento máximo do grafo. Um dos vizinhos de v_k é v_{k-1}. Pela condição do problema sabemos que v_k tem pelo menos outros dois vizinhos. Sejam x e y outros dois vizinhos de v_k. Os vértices x e y estão no caminho P, caso contrário existiria um caminho mais longo que P. Seja $x = v_i$ e $y = v_j$, com $1 \leq i < j \leq k-2$. Logo, $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i)$ é um ciclo no grafo com pelo menos quatro vértices.

7. Uma ponte em um grafo conexo $G = (V, E)$ é uma aresta e tal $G - e$ não é conexo.

   a) Exiba um grafo conexo que contém uma ponte.

   b) Mostre que se uma aresta e não é uma ponte em um grafo conexo G, então existe um ciclo em G que contém e.

   Solução

   a) $G = (V, E)$, aonde $V = \{a, b\}$ e $E = \{ab\}$. A aresta ab é uma ponte.

   b) Se e não é uma ponte então por definição o grafo $G - e$ é conexo. Seja P um caminho entre as extremidades de e em $G - e$. Portento, $P \cup e$ é um ciclo em G que contém a aresta e.

8. Uma cobertura por vértices para um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que toda aresta de G incide em pelo menos um vértice de C. Um conjunto independente para G é um conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que nenhum par de vértices de S é vizinho em G. Mostre que o conjunto X é uma cobertura para G se e somente se $V - X$ é um conjunto independente para G.

   Solução Seja X uma cobertura de vértices para G. Considere dois vértices arbitrários u, v em $V - X$. Não podemos ter uma aresta ligando u a v caso contrário esta aresta não seria coberta por X. Portanto, $V - X$ é um conjunto independente.

Mostramos agora a volta. Seja $V - X$ uma conjunto independentes para G. Seja $e = uv$ uma aresta arbitrária de G. Como $V - X$ é indpendente, ou v ou u não podem pertencer a $V - X$ e, portanto, pelo menos um deles pertence a X. Logo, X é uma cobertura.

4 Árvores

1. Prove que toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos dois vértices com grau 1.

   Solução. Sabemos que uma árvore tem que ter exatamente $n-1$ arestas, aonde n e o número de vértices da árvore. Portanto, a soma dos graus dos vértices da árvore tem que ser igual ao dobro do número de arestas, ou seja, $2n-2$. Além disso, o grau de todo vértice é pelo menos 1 porque uma árvore é um grafo conexo. Se a árvore tiver no máximo um vértice com grau 1, então a soma dos graus dos vértices será pelo menos $2 \times (n-1)+1 > 2n-2$, o que não é possível. Portanto, toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos dois vértices com grau 1.

2. Existe uma árvore com n vértices onde algum vértice tem grau $n - 1$? Existe uma árvore com n vértices onde dois vértices tem distância de $n-1$.

3. O centro de um grafo é um vértice u tal que $\max_{v \in V(G)} d(u, v)$ é mínimo, onde $d(u, v)$ é a distância entre u e v. Mostre que uma árvore tem exatamente 1 ou 2 centros.

4. Seja $G = (V, E)$ um grafo acíclico com k componentes conexas. Mostre que $|E| = |V| - k$.

   Sugestão Utilize a mesma técnica utilizada para provar que toda árvore com n vértices tem $n - 1$ arestas.

5 Trajetos Eulerianos

1. Considere o grafo G da Figura 1. Qual o número mínimo de arestas (vértices não valem) que devemos adicionar a G de modo que o novo grafo seja simples e tenha um trajeto Euleriano Fechado ? Justifique.

   Sugestão. Lembre que um grafo tem um trajeto Euleriano fechado se e somente se ele não tem vértices com grau ímpar.

2. Mostre que se um grafo direcionado tem um trajeto Euleriano, no máximo 2 vértices tem grau de entrada diferente do grau de saída.

3. Para quais valores de r e s, o grafo bipartido completo $K_{r,s}$ é Euleriano.?

   Sugestão. Lembre que um grafo Euleriano tem 0 ou 2 vértices com grau ímpar. Análise o número de vértices de grau ímpar em função de r e s.

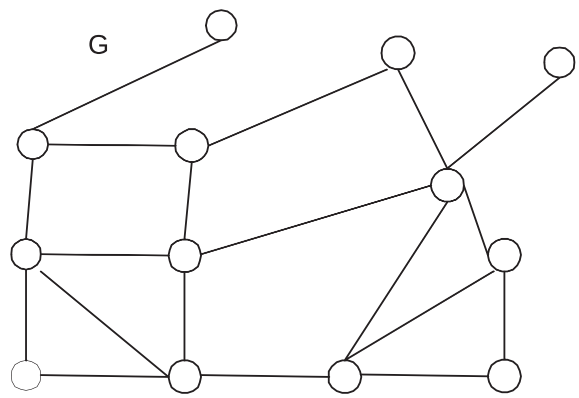

Figura 1:

6 Grafos Completos e Grafos Bipartidos

1. Mostre que se G é simples e bipartido, então $|E(G)| \leq |V(G)|^2/4$.

   Sugestão Seja (A, B) uma bipartição para o grafo G. Portanto, G tem no máximo $|A| \times (|V(G)| - |A|)$ arestas. Isto acontece quando todos os vértices da partição A estão ligados a todos da partição B. Basta mostrar então que $|A| \times (|V(G)| - |A|)$ é menor ou igual que $|V(G)|^2/4$. A expressão $|A| \times (|V(G)| - |A|)$ é uma parábola em $|A|$ que atinge seu máximo quando $|A| = |V(G)/2$. Substituindo este valor em $|A| \times (|V(G)| - |A|)$ obtemos $|V(G)|^2/4$.

2. Encontre o comprimento do menor ciclo em $K_{3,3}$

3. Determine o número de componentes conexas de $\overline{K}_{2,3}$ (complemento de $K_{2,3}$) e de $\overline{K}_n$

4. *Mostre que todo grafo simples G contem um subgrafo bipartido gerador H tal que $d_H(v) \geq d_G(v)/2$, onde $d_G(v)$ e $d_H(v)$ são, respectivamente, o grau de v em G e o grau de v em H.

5. Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo. Seja G umg rafo bipartido com 11 vértices. O grafo G admite um ciclo Hamiltoniano? Por que?

   Solução Não porque o grafo bipartido teria que ter um ciclo de comprimento 11 e grafos bipartidos não possuem ciclos ímpaares.

7 Grafos Direcionados

1. Mostre que um grafo direcionado $G = (V, E)$ é fortemente conexo se e somente se existe um vértice v tal que v alcança todos os vértices de G e todos os vértices de G alcançam v.

   Solução Se G é fortemente conexo então, por definição, existe caminho entre todo par de vértices. Portanto, existe um vértice v tal que v alcança todos os outros e todos os outros alcançam v.

   A parte mais interessante é mostrar que se existe um vértice v tal que v alcança todos os vértices de G e todos os vértices de G alcançam v, então G é fortemente conexo. Para mostrar isso é suficiente provar que esta condição implica na existência de um caminho entre dois vértices arbitrários x e y de G. Para ir de x a y basta seguir o caminho de x a v e depois de v a y. Portanto, existe caminho entre x e y.

2. Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. Mostre que G é fortemente conexo se e somente se para toda partição de V em dois conjuntos não vazios S e T, existe uma aresta de S para T.

3. Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. Dizemos que G é um torneio se para todo par de vértices u, v, com $u \neq v$, uma das condições vale: $(u, v) \in E$ ou $(v, u) \in E$. Responda as seguintes questões.

   a) *Mostre que todo torneio admite um caminho que passa por todos os vértices do grafo apenas uma vez

   b) Exiba um torneio com 5 vértices que admite uma ordenação topológica.

   a) **Sugestão.** Consulte o exemplo do torneio de tênis na seção da apostila que aborda indução.

   b) **Solução.** $G = (V, E)$ aonde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq 5\}$.

8 Árvore Geradora de Custo Mínimo

1. Seja T uma árvore geradora para um grafo G. Definimos como gargalo de T, o custo da aresta mais cara de T. Uma árvore geradora T' para G é uma árvore de gargalo mínimo se e somente se nenhuma árvore geradora para G tem gargalo menor que T'. Responda as seguintes questões:

   (a) Toda árvore de gargalo mínimo é uma árvore geradora de custo mínimo? Prove ou dê um contra-exemplo

   (b) Toda árvore geradora de custo mínimo é uma árvore de gargalo mínimo? Prove ou dê um contra-exemplo

(a) **Solução.** A resposta é sim. Assuma que uma AGM T não é uma árvore de gargalo mínimo. Seja $T*$ uma árvore de gargalo mínimo para o grafo e seja f a aresta de maior custo de T. Temos que f não pertence a $T*$ já que T não é uma árvore de gargalo mínimo. Logo, o subgrafo obtido pela união de $T*$ com a aresta f contém um ciclo. A aresta mais cara deste ciclo é f e, portanto, pela propriedade do ciclo, f não pode pertencer a T. Contradição!

(b)**Solução.** Não. Considere um grafo G formado por um triângulo, onde um dos vértices está ligado a um caminho. Considere que as arestas tem custos distintos e a de maior custo em G não pertence ao triângulo. Então existe apenas uma AGM e toda árvore geradora é uma árvore de gargalo mínimo.

2. Seja $G = (V, E)$ um grafo completo e não direcionado com 5 vértices. Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Assuma que o custo da aresta que liga i a j é $i+j$ para todo $1 \leq i < j \leq 5$. Qual o custo da árvore geradora de custo mínimo para G?

3. Seja G um grafo conexo com pesos positivos e distintos nas arestas. Seja e a aresta mais cara de G. Sob quais condições a aresta e pode pertencer a árvore geradora de custo mínimo de G?

   Solução Somente se ela não estiver em nenhum ciclo.

9 Caminhos de Custo Mínimo

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo completo e não direcionado com 5 vértices. Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Assuma que o custo da aresta que liga i a j é $i+j$ para todo $1 \leq i < j \leq 5$. Qual o custo do caminho mais curto entre os vértice 1 e 5?

2. Seja G um grafo direcionado com pesos positivos nas arestas e conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Sabemos que o caminho de peso mínimo entre os vértices 1 e 8 é $(1, 4, 2, 5, 7, 8)$. O que podemos afirmar sobre o caminho de peso mínimo entre os vértices 4 e 7?

10 Coloração de Vértices e de Arestas

1. Seja T uma árvore cujo grau máximo é 7. Determine o número cromático e o índice cromático de T, ou seja 7.

   Solução Uma árvore é um grafo bipartido e portanto tem número cromático igual a 2. O índice cromático é igual ao grau máximo.

2. Seja um grafo simples G. Seja c_1 a cor que aparece mais vezes em uma coloração de arestas para G e seja n_1 o número de arestas de cor c_1. Mostre que n_1 não excede $|V(G)|/2$.

Sugestão Utilize o princípio da casa dos pombos para argumentar que se n_1 exceder $|V(G)|/2$ então haverá algum vértice tal que pelo menos duas arestas de cor c_1 incidem nele.

3. Mostre que o número cromático de um grafo G é maior ou igual ao número de vértices de qualquer subgrafo completo de G.

   Solução Dentre os subgrafos completos de G seja H um com número máximo de vértices. Uma coloração para G tem que atribuir uma cor diferente para cada vértice de H e, portanto, o número cromático de G é maior ou igual ao número de vértices de H.