LISTA DE INDUÇÃO
PROFESSOR: EDUARDO LABER

1 Indução Básica

1. Encontre o menor inteiro n_0 para o qual $n! > 2^n$. Prove por indução que esta relação é válida para $n \geq n_0$.

2. Prove por indução que para $n \geq 0$ e inteiro, n^2+3n é divisível por 2 e n^3+3n^2+2n é divisível por 6.

3. Prove por INDUÇÃO que

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   b) $7^n - 2^n$ é divisível por 5 para todo $n \geq 1$.

4. Prove por **indução**.

   (a) Seja $q > 0$. Então para todo n inteiro, com $n \geq 1$,

   $$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

   (b) A soma dos n menores números ímpares que são maiores que 77 é $78n + n^2$

5. Prove por indução que $\forall n \geq 1$, a soma dos n primeiros números pares que deixam resto 1 na divisão por 3 é $3n^2 + n$.

6. Para $n \geq 1$, mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} i!$ é um número ímpar

2 Indução e Recorrências

1. Seja a equação de recorrência definida por

   $T(n) = T(n-1) + n, \text{ para } n \geq 2$
   $T(1) = 1.$

   Prove por indução que $T(n) > n^2/2$

2. A sequência de Fibonacci é definida da seguinte forma: $F(1) = 1, F(2) = 2$ e $F(n) = F(n-1) + F(N-2)$, para $N \geq 3$. Prove por indução que que todo número inteiro positivo pode ser escrito como soma de termos distintos da sequência de Fiibonacci. Exemplo: 14=13 +1, 12 = 8 + 3 +1

3. Prove por indução que $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} < 2$

4. Seja a sequência de Fibonacci definida como $F(1) = F(2) = 1$ e $F(n) = F(n-1) + F(n-2), \forall n \geq 2$. Mostre que

   - **a**. $S_n = \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{2n+1} - 1$
   - **b**. Para $n \geq 3$, mostre que $\left(\frac{5}{4}\right)^n \leq F_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$

5. Considere o seguinte problema. Temos 3 hastes: A, B e C e n discos: $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Todos os discos estão inicialmente empilhados na haste A, com D_n na base, D_{n-1} em cima de D_n, D_{n-2} em cima de D_{n-1}, e assim por diante. O objetivo é mover todos os discos da haste 1 para haste 2. Para isso o seguinte procedimento é adotado

   MoveDisco(n,ini,dest)

   Se $n = 1$

   Retire o Disco D_1 de haste *ini* e coloque na haste *dest*

   Fim Se

   $x \leftarrow \{A, B, C\} - \{ini, dest\}$

   MoveDisco(n-1,ini,x)

   Retire o Disco D_n da haste *ini* e coloque na haste *dest*

   MoveDisco(n-1,x,dest)

Fim

Dizemos que um disco é movido uma vez se ele é retirado de uma haste e colocado em outra. Prove por **indução** que o número de movimentações de discos é $2^n - 1$.

6. Considere o seguinte procedimento

   P(n)

   Se $n < 3$

   Imprima('Oi') 4 vezes

   Return

   Senão

   P(n-1)

   P(n-2)

   Fim Se

   a) Se P é chamado com $n = 5$, quantas vezes a palavra Oi é impressa?

   b) Seja $T(n)$ o número de vezes que a palavra Oi é impressa quando $P(n)$ é executado. Escreva uma equação de recorrência relacionando $T(n)$ com $T(n-1)$ e $T(n-2)$.

   c) Utilize **indução** em n para mostrar que $T(n) \leq 4(7/4)^n$.

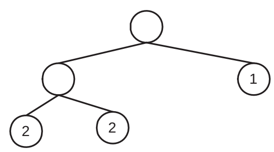
3 Indução Estrutural

1. Seja uma festa com n pessoas onde cada pessoa conhece no máximo 7 outras pessoas. Prove que é possível separar as pessoas em 8 grupos de modo que quaisquer duas pessoas do mesmo grupo não se conheçam.

2. Uma árvore estritamente binária é uma árvore binária em que todo nó tem 0 ou 2 filhos. Uma folha em uma árvore é um nó que não tem nenhum filho. O nível de uma folha em uma árvore binária é o número de arcos do caminho que começa na folha e termina na raiz. Para um melhor entendimento, a árvore estritamente binária mostrada na Figura 1 tem 3 folhas em níveis 2,2,1. Sejam $l_1, l_2, \ldots, l_n$ os níveis das folhas de uma árvore estritamente binária com n folhas. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$$

Sugestão: Use indução forte no número de folhas de uma árvore e o fato de que uma árvore estritamente binária é composta de uma raiz, uma subárvore à direita da raiz e uma subárvore à esquerda da raíz.



3. (*). Dado um conjunto de n elementos, mostre que é possível fazer uma fila com seus 2^n subconjuntos de modo que cada subconjunto da fila pode ser obtido a partir do anterior pelo acréscimo ou supressão de um único elemento. subconjuntos.

4. Prove por indução matemática que o número de permutações de n elementos diferentes é $n!$.

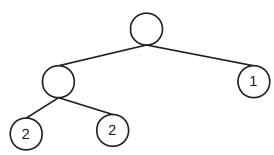
5. Seja T uma árvore estritamente binária (vide definições abaixo) com n folhas. Definimos o *potencial* de uma folha como 2 e o potencial de um nó interno como o produto do potencial de seus filhos.

   a) Desenhe um árvore estritamente binária com seis folhas e encontre o potencial de sua raíz.

   b) Utilize indução na altura da árvore para mostrar que o potencial da raíz de uma árvore estritamente binária de altura h é no máximo 2^{2^h}.

   Definição Uma árvore estritamente binária é uma árvore binária em que todo nó tem 0 ou 2 filhos. Uma folha em uma árvore é um nó que não tem nenhum filho. O nível de uma folha em uma árvore binária é o número de arcos do caminho que começa na folha e termina na raiz. A altura de uma árvore binária é o nível da folha de maior nível na árvore.

   Como exemplo, a árvore estritamente binária mostrada na Figura 1 tem 3 folhas em níveis 2,2,1 e sua altura é 2.


1
2
2