Rio de Janeiro, 13 de Maio de 2009.
PROVA 2 DE ANÁLISE DE ALGORITMOS
PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER

1. (3.0pt) Seja um grafo não direcionado $G = (V, E)$. Uma cobertura para G é um conjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que toda aresta de E tem pelo menos uma de suas extremidades em C. Uma cobertura C é dita ótima se não existe outra cobertura C' tal que $|C'| < |C|$. Considere o seguinte algoritmo guloso apresentado na figura abaixo.

$C \leftarrow \emptyset$;
Enquanto G tem alguma aresta
    $v \leftarrow$ vértice de G com maior grau
    $C \leftarrow C \cup v$
    Remova v de G [1]
Fim Enquanto
Devolva C

Figura 1: Cobertura

a) Exiba um exemplo mostrando que este algoritmo nem sempre devolve a cobertura ótima.

b) Assuma que o grafo é dado por uma lista de adjacências. Explique como implementar o algoritmo acima e analise em função de $|V|$ e $|E|$ a complexidade da implementação. Quanto mais eficiente melhor.

2.(2.0pt) Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e não direcionado. Uma ponte em G é uma aresta $e \in E$ tal que se removermos e de G o grafo fica desconectado.

a) Seja $e = uv$ uma aresta que não é uma ponte. Podemos afirmar que existe um ciclo em G que contém os vértices u e v. Por que?

b) Assuma que G esta representado por uma lista de adjacências. Dada uma aresta $e = uv$, determine como modificar o código da DFS para determinar se e é uma ponte do grafo. Qual a complexidade do algoritmo?

3. (2.0pt) Considere um tabuleiro de xadrez (4x4) com as casas numeradas de 1 a 16. Seja $G = (V, E)$ um grafo, aonde $V = \{1, ..., 16\}$ e

$$E = \{ij| \text{ as casas i e j são adjacentes (separadas por uma reta) no tabuleiro}\}.$$

Além disso, assuma que o custo da aresta entre i e j é $i \times j$.

a) Desenhe G e compute uma árvore geradora mínima para G

b) Explique o algoritmo utilizado e discuta a sua complexidade.

4 (3.0). Considere um tabuleiro de xadrez (4x4) com as casas numeradas de 1 a 16. Seja $G = (V, E')$ um grafo direcionado, aonde $V = \{1, ..., 16\}$ e

$$E' = \{(i, j)|\text{as casas i e j tem pelo menos um ponto de contato no tabuleiro e } i < j\}.$$

Além disso, assuma que o custo da aresta (i, j) é $i + j$.

a) Execute o algoritmo de Dijkstra para computar a árvore de caminhos de custo mínimos entre o vértice 1 e os demais vértices do grafo G.

b) Qual é a altura da árvore gerada por uma BFS em G o tendo como origem o nó 1?

c) Quantas componentes fortemente conexas tem o grafo G?

```
Para todo  u ∈ V
        Se u não foi visitado
            DFS-VISIT(u)
DFS-VISIT(u)
        Marque u como visitado
        Para todo vértice v ∈ Adj(u)
            Se v não foi visitado
                DFS-VISIT(v)
```

Figura 2: DFS

BFS
Procedure BFS(G,s)
1. Marque s como visitado
5. ENQUEUE(Q,s)
9. **while** $Q \neq \emptyset$
10. u $\leftarrow$ DEQUEUE(Q)
11. **For each** $v \in Adj[u]$
12. **if** v não visitado **then**
14. Marque v como visitado
16. ENQUEUE(Q,v)
20. **End For**
30. **End While**

Figura 3: Pseudo-Código de uma BFS