Rio de Janeiro, 9 de Junho de 2014.

LISTA DE COMPLEXIDADe E ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO

PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER

ENTREGA:

1. Dado um conjunto universo $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de U e um inteiro k, o problema de *Máxima Cobertura* consiste em encontrar k conjuntos de $\mathcal{F}$ tal que a cardinalidade da união destes conjuntos seja a maior possível. Mostre que este problema é NP-Completo.

2. O problema da partição balanceada é definido da seguinte maneira. Dado um conjunto de números inteiros positivos U, o objetivo é encontrar $A \subseteq U$ tal que

$$\left| \sum_{u \in A} u - \sum_{u \in U-A} u \right|$$

é mínimo. Mostre que se este problema admite um algoritmo polinomial então $P = NP$.

3. Problema 8.29 (Kleinberg & Tardos)

4. Considere um conjunto $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ de n objetos e seja $w_i > 0$ o peso do objeto o_i, para $i = 1, ..., n$. Dado $L > 0$, o problema de empacotamento consiste em encontrar o número mínimo de caixas de capacidade L que são necessárias para guardar os objetos de O.

a) Mostre que o problema de empacotamento pode ser reduzido polinomialmente ao problema de escalonamento de jobs em máquinas uniformes estudado em classe.

b) Seja $OPT(L)$ o número mínimo de caixas de capacidade L que são necessárias para guardar os objetos de O. Determine um limite inferior para $OPT(L)$ em função de L e de $w_1, \ldots, w_n$,

c) Mostre que no máximo uma das caixas abertas tem peso menor que $L/2$ ao término da execução do algotimo abaixo.

Para $i = 1, ..., n$

Se o_i cabe em alguma caixa já aberta, coloque o_i nessa caixa

Senão abra uma nova caixa e coloque o_i.

Fim Para

d) Mostre que o algoritmo do item anterior é 2-aproximado.

e) Mostre que análise do item anterior é justa.

5. Dado um grafo $G = (V, E)$, um conjunto $S \subseteq V$ é dito independente se e somente se não existem arestas entre vértices de S. O problema do conjunto independente máximo consiste em

encontrar o maior conjunto independente em G. Exiba uma formulação por programação linear inteira para o problema do Conjunto independente máximo. As variáveis devem ser binárias.

6. Dado um grafo $G = (V, E)$, uma cobertura de vértices para G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que para toda aresta $e \in E$ tem pelo menos uma de suas extremidades em V'. O problema da *Cobertura Mínima* consiste em encontrar uma cobertura de vértices de cardinalidade mínima para G. Considere o seguinte algoritmo

Passo 1. Encontre o matching M^* em G de cardinalidade máxima

Passo 2. Seja $V(M^*)$ os vértices que são extremidades das arestas de M^*.

Passo 3. Devolva $V(M^*)$.

a) Mostre que o algoritmo devolve uma cobertura por vértices.

b) Mostre um exemplo em que o algoritmo encontra a cobertura ótima.

c) Seja $OPT(G)$ o tamanho da cobertura de cardinalidade mínima para G. Mostre que $OPT(G) \geq |M^*|$.

d) Mostre que o algoritmo acima é 2-aproximado.

e) Encontre um exemplo com 10 vértices para o qual o algoritmo esteja a um fator de 2 do ótimo.

f) Um dos problemas do algoritmo acima é que ele necessita calcular o matching de cardinalidade máxima, o que pode consumir muito tempo para grafos grandes. Tente modificar o Passo 1 do algoritmo acima para que ele continue garantido uma 2-aproximação, porém em tempo linear no tamanho do grafo.