Programação Linear

Programação Linear

- Muitos dos problemas algoritmicos são problemas de otimização:
  - encontrar o menor caminho,
  - o maior fluxo
  - a árvore geradora de menor custo

- Programação linear rovê um framework que permite resolver uma série de problemas de otimização em que as restrições e o critério a ser otimizado são funções lineares

Programação Linear

Abordagem

- Defina as variáveis cujos valores serão determinados.
- Escreva a função objetivo, uma expressão linear envolvendo as variáveis que deve ser minimizada ou maximizada
- Escreva um conjunto de restrições lineares
- Utilize um resolvedor de LP para determinar o valor das variáveis

Problema com duas variáveis

- Devemos fabricar cadeiras e mesas.
  - Cada cadeira necessita de 5 tábuas de madeira e cada mesa 20. Ao todo temos 400 tábuas
  - Cada cadeira precisa de 10 horas de trabalho e cada mesa 15 horas. Temos 450 horas de trabalho disponíveis.
- Queremos maximizar o lucro. O lucro por cadeira é 45 e por mesa é 80

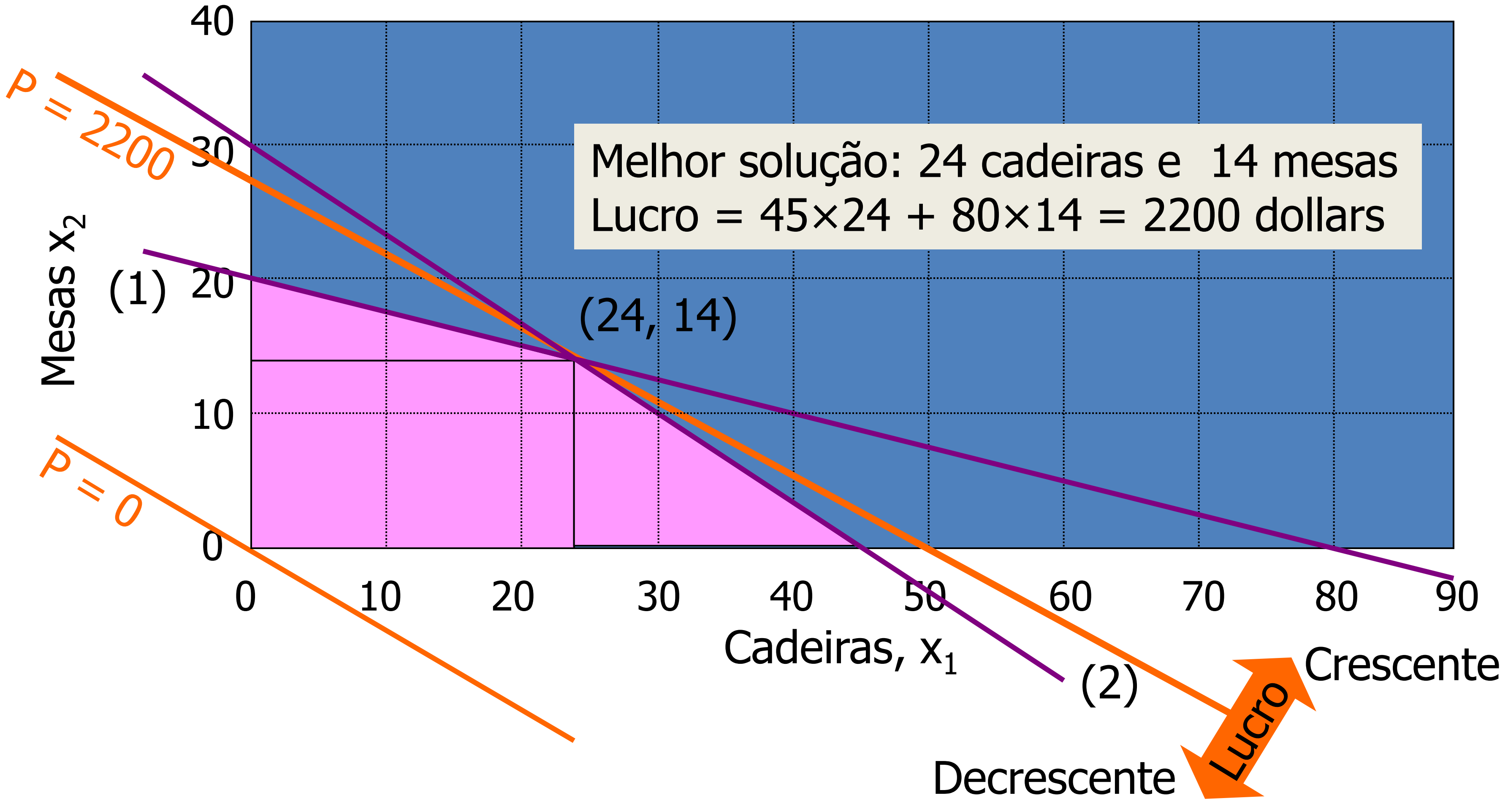
Problema com duas variáveis

- $x_{1:}$ número de cadeiras ,
- x_2 : número de mesas:

maximizar $45x_1 + 80x_2$

$5x_1 + 20x_2 \leq 400$	(1)
$10x_1 + 15x_2 \leq 450$	(2)
$x_1 \geq 0$	(3)
$x_2 \geq 0$	(4)

Problema com duas Variáveis



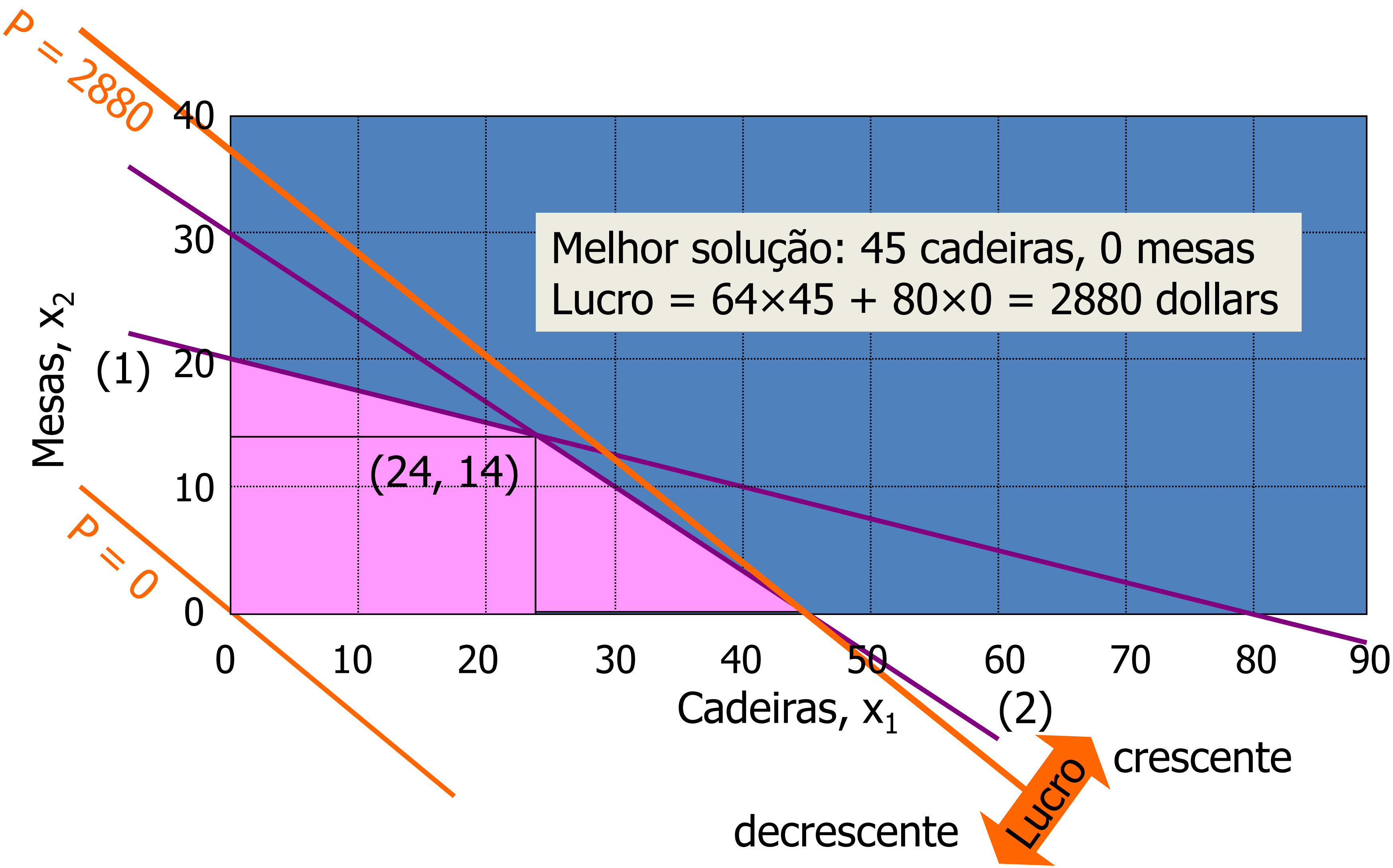
Modificando o lucro

- Lucro por cadeira = 64

maximizar $64x_1 + 80x_2$

$$
\begin{array}{ll}
5x_1 + 20x_2 \leq 400 & (1) \\
10x_1 + 15x_2 \leq 450 & (2) \\
x_1 \geq 0 & (3) \\
x_2 \geq 0 & (4)
\end{array}
$$

Solution: \$64 Profit/Chair



Planejamento da Produção

- Como minimizar o custo da produção de tapetes?
  - Demandas para os próximos meses: d(1),d(2),…,d(12)
  - 30 empregados, cada um faz 20 tapetes por mês
  - Salário de cada empregado: R$2000,00 por mês
  - Como podemos lidar com as variações de demanda?
    - Hora extra: pagamos 80% a mais e podemos alocar no máximo 30% de horas extra por funcionário
    - Contratar e demitir: custos R$320,0 e R$400,00
    - Amazenar excedente: custo de R$8,00 por tapete por mês

Planejamento da Produção

- Variáveis
  - w(i): trabalhadores para o mês i
  - x(i) número de tapetes produzidos em i
  - o(i) : número de tapetes produzidos devido a horas extras no mês i
  - h(i),f(i): número de empregados contratados e demitidos no início do mês i
  - s(i): número de tapetes armazenados no final do mês i

Planejamento da Produção

- Restrições
  - x(i),w(i),o(i),h(i),f(i),s(i)>=0
  - x(i)=20w(i)+o(i)
  - w(i)=w(i-1)+h(i)-f(i) (trabalhadores no início de i)
  - s(i)=s(i-1)+x(i)-d(i) (excedente no início de i)
  - o(i)<=6w(i) (Produção devido a horas extras é limitada)

Planejamento da Produção

Função Objetivo

Minimizar $$\sum_i 2000\,w_i + 320\,h_i + 400\,f_i + 8s_i + 180\,o_i$$

Planejamento da Produção

Função Objetivo

Minimizar $$\sum_i 20000\,w_i + 320\,h_i + 400\,f_i + 8s_i + 180\,o_i$$

- Nesse caso a solução fracionária pode ser arredondada sem comprometer muito a função objetivo.
  - Programação Linear X Programação Linear Inteira
  - É possível mostrar que sob certas condições a sol. Óitma de um programa linear é inteira.

Classificação de um LP quanto a solução ótima

- **Possui solução ótima**

  max 2y(1)+3y(2)

  y(1)>=2 , y(2)> =4   3y(1)+2y(2)<=20

- **Ilimitado**

  max 2y(1)+3y(2)

  y(1)>=2 , y(2)<=4

Classificação de um LP quanto a solução ótima

- **Inviável**

$\max 2y(1)+3y(2)$

$y(1)>=2 \quad y(2)> =4 \quad 3y(1)+2y(2)<=7$

Variações dos LP's

1. Transformando maximização em minimização
   – Basta multiplicar coeficientes da função objetivo por -1
2. Transformando desigualdades em igualdades

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Variações dos LP’s

3. Transformando igualdades em desigualdades

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \end{cases}$$

4. Trabalhando com variáveis positivas.

   Uma variável irrestrita x pode ser substituída por x’- x’’ , com x’,x’’>=0

Variações dos LP's

Forma Padrão (standard)

- Variáveis não-negativas
- Restrições são equações
- Função objetivo é uma minimização

Exemplo da página 198

Dualidade

- Qual é o valor da solução ótima de

$$
\begin{array}{lll}
\textit{max} & x1+6x2 & \\
 & x1<=200 & \text{(I)} \\
 & x2<=300 & \text{(II)} \\
 & x1+x2<=400 & \text{(III)} \\
 & x1,x2>=0 &
\end{array}
$$

Como podemos mostrar que o ótimo é (x1,x2)=(100,300)?

Dualidade

- Qual é o valor da solução ótima de

$$
\begin{array}{lll}
\textit{max} & x1+6x2 & \\
 & x1\le 200 & \text{(I)} \\
 & x2\le 300 & \text{(II)} \\
 & x1+x2\le 400 & \text{(III)} \\
 & x1,x2\ge 0 &
\end{array}
$$

Multiplicando rest (II) por 6 e somando com rest(I) concluimos que o máximo é menor ou igual a 2000

Dualidade

- Qual é o valor da solução ótima de

$$
\begin{array}{lll}
\textit{max} & x1+6x2 & \\
 & x1<=200 & \text{(I)} \\
 & x2<=300 & \text{(II)} \\
 & x1+x2<=400 & \text{(III)} \\
 & x1,x2>=0 &
\end{array}
$$

Multiplicando rest (II) por 5 e somando com rest(III) concluimos que o máximo é menor ou igual a 1900. Achamos um certificado!

Dualidade

- Qual é o valor da solução ótima de

$$
\begin{array}{lll}
\textit{max} & x1+6x2 & \\
 & x1<=200 & \text{(I)} \\
 & x2<=300 & \text{(II)} \\
 & x1+x2<=400 & \text{(III)} \\
 & x1,x2>=0 &
\end{array}
$$

É possível generalizar essa idéia?

Dualidade

- Qual é o valor da solução ótima de

  max $x1+6x2$

  $x1<=200$ (I); $x2<=300$ (II); $x1+x2<=400$ (III)

  $x1,x2>=0$

  Sejam $y1,y2,y3$ multiplicadores positivos para as restrições tal que $y1+y3>=1$ e $y2+y3>=6$. Temos então $200y1+300y2+400y3$ é maior ou igual a solução ótima do LP.

Dualidade

- Qual é o valor da solução ótima de

$$\textit{min}\ 200y1+300y2+400y3$$

$$y1+y3>=1$$

$$y2+y3>=6.$$

$$y1,y2,y3>=0$$

Dualidade

Primal P

Max cx

$\mathbf{A}x \le b$

$x \ge 0$

Dual D

Min yb

$y\mathbf{A} \ge c$

$y \ge 0$

Teorema da Dualidade:

(i) Se P tem solução ótima x* então D tem solução ótima y* com cx*=y*b

(ii) Se P é inviável, D é ilimitado

(iii) Se P é ilimitado então D é inviável

Fluxo em Redes x Dualidade

Mostrar Fluxo em Redes x Dualidade

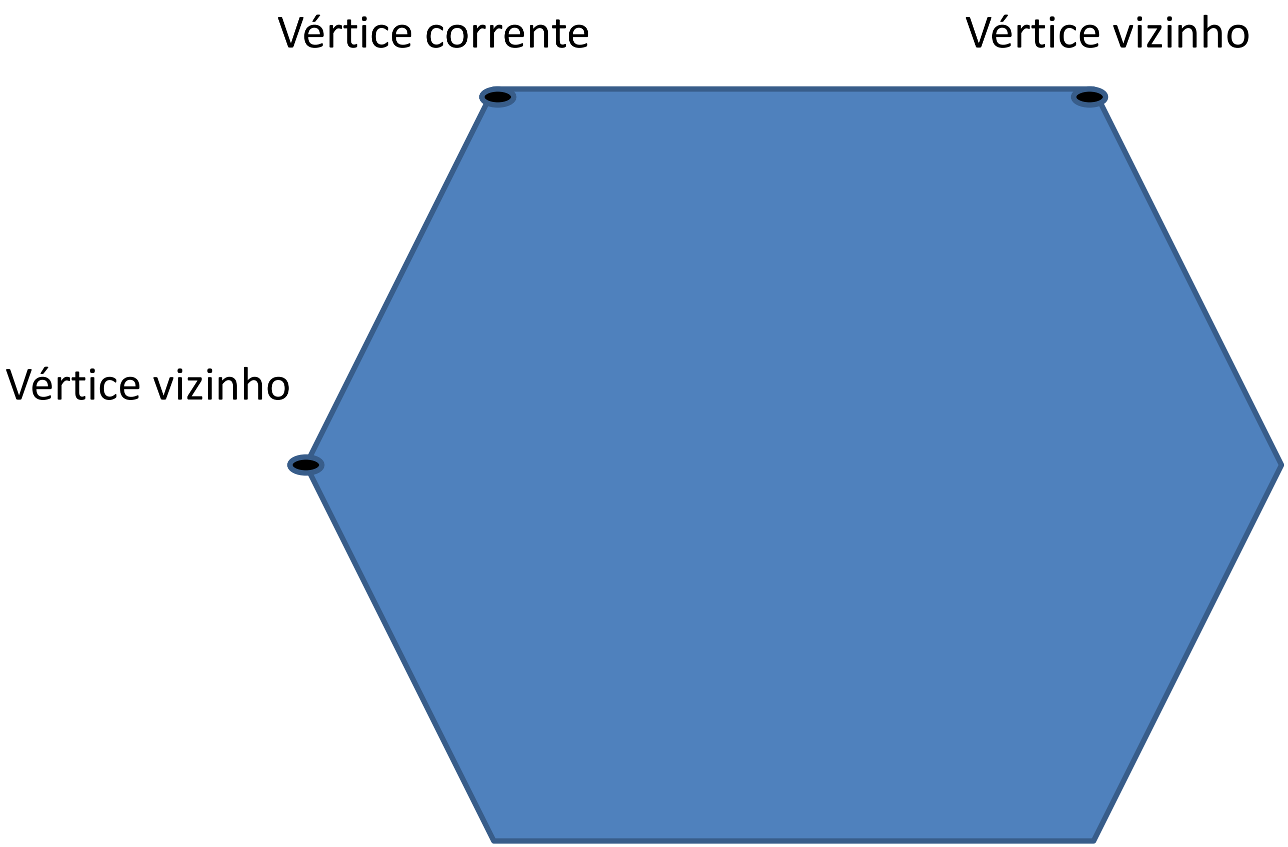
Resolvendo LP's

- Simplex
  - Considera o problema

$$\begin{aligned} &\text{Min } cx \\ &\quad Ax \le b \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

  - Caminha pelos vértices do poliedro definido pelas restrições do problema.
  - A partir de um vértice busca um vértice vizinho que melhora a função objetivo
  - O algoritmo para quando não existir um vértice vizinho que melhore a solução

Resolvendo LP’s



EXEMPLO P 217

Resolvendo LP’s

- Vértice no R^n
  - Selecione um subconjunto **A** de n restrições linearmente indpendentes e resolva o sistema
  - Seja **v** o único ponto que satisfaz com igualdade o conjunto de restrições. Se **v** é viável então **v** é um vértice do poliedro.
  - Dizemos que **v** é definido pelo conjunto de restrições **A**.
- Vértices vizinhos
  - Os vértices **u** e **v** são vizinhos se são vértices definidos por conjuntos de restrições que tem n-1 restrições em comum

Resolvendo um LP: Solução Inicial

- Solução Inicial
  - Podemos encontrar uma solução inicial para o problema P resolvendo um LP P' aonde conhecemos uma solução inicial

Resolvendo LP's : Solução Inicial

- Inicie com um problema na forma padrão

  min cx

  Ax=b

  x>=0

- Force os valores de b a serem não negativos multiplicando por -1 algumas igualdades, se necessário
- Crie m variaveis z(1),...,z(m)>=0, uma para cada restrição. Adicione z(i) ao lado direito da i-ésima restrição

Resolvendo LP's : Solução Inicial

- Resolva o problema P'

  $$\min z(1)+z(2)+...+z(m)$$

  $$Ax+Iz=b$$

  $$x,z>=0$$

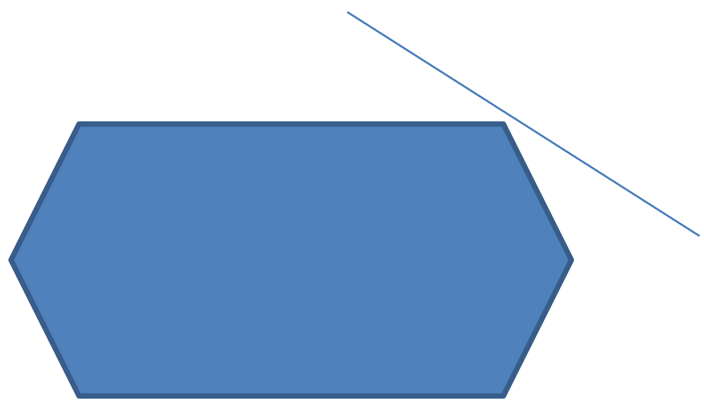
- z(i)=b(i), para i=1,...,m, e x=0 é uma solução viável para P'
- Se a solução ótima para P' tem valor objetivo >0 então P é inviável. Senão, seja (x',z'), com z'=0, uma solução ótima para P'. Então x' é uma solução viável para P.

Resolvendo LP's

- Problemas ilimitados
  - Ao explorar a vizinhança de um vértice o Simplex pode perceber que remover uma equação e adicionar outra pode levar a um sistema indeterminado, com infinitas soluções.
  - Nesse caso o Simplex indica que o problema é ilimitado

Resolvendo LP's

- Soluções degeneradas
  - Pode aconetecer de mais de um conjunto de n restrições definir um vértice **v**. Tais vértices são chamados de soluções degeneradas
  - É necessário um cuidado especial para lidar com eles.



Resolvendo LP's

- Eficiência do Simplex
  - Pior caso exponencial. Existem $\binom{m}{n}$ formas de escolher n restrições
  - muito rápido na prática, entradas exponenciais são muito raras.
  - Resolvedores comerciais (CPLEX, XPRESS)

Resolvendo LP's

- Elipsóide
  - Método polinomial com interesse apenas teórico já que o polinomio tem grau muito alto

- Pontos Interiores
  - Método polinomial com desempenho competitivo com o Simplex

A single variable problem

- Consider variable x
- Problem: find the maximum value of x subject to constraint, $0 \leq x \leq 15$.
- Solution: $x = 15$.

Single Variable Problem (Cont.)

- Consider more complex constraints:
- Maximize x, subject to following constraints
  - $x \geq 0$ (1)
  - $5x \leq 75$ (2)
  - $6x \leq 30$ (3)
  - $x \leq 10$ (4)