

## O PROBLEMA DA CORREÇÃO E COMPLETUDE FORTES EM LÓGICA DE DEFAULTS

Alexandre P. de Carvalho<sup>1</sup>, Marco A. Casanova<sup>1</sup> e Sheila R. M. Veloso<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centro Científico Rio - IBM Brasil  
Caixa Postal 4624 - 20001, Rio de Janeiro, RJ

<sup>2</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação - COPPE  
Caixa Postal 68511 - 21945, Rio de Janeiro, RJ

**RESUMO** - Uma sentença  $\alpha$  é consequência lógica forte de uma teoria com defaults  $\Delta$  se e somente se  $\alpha$  pertence a todas as extensões de  $\Delta$ . O objetivo deste trabalho é apresentar os principais resultados obtidos na tentativa de se desenvolver um método de dedução fortemente correto e completo para a Lógica de Defaults, ou seja, um método que forneça uma prova de  $\alpha$  se e somente se  $\alpha$  for consequência lógica forte de  $\Delta$ .

**PALAVRAS-CHAVE** - Método de Dedução Não-Monotônico, Correção Forte, Completude Forte, Lógica de Defaults, Eliminação de Modelos, Programação em Lógica.

### 1 - INTRODUÇÃO

A teoria de prova para a Lógica de Defaults, apresentada em [REIT80], é correta e completa na medida em que existe uma prova de uma sentença  $\alpha$  a partir de uma teoria com defaults normal, fechada e consistente  $\Delta$  se e somente se  $\alpha$  pertence a alguma extensão de  $\Delta$ . Intuitivamente, podemos considerar cada extensão de uma teoria com defaults como uma interpretação consistente desta. Portanto, quando uma sentença  $\alpha$  pertence a alguma extensão de uma teoria com defaults, na realidade,  $\alpha$  é uma conclusão plausível, mas não infalível, a partir desta teoria.

O objetivo deste trabalho é apresentar os principais resultados obtidos na tentativa de se desenvolver um método de dedução para a Lógica de Defaults que forneça uma prova de  $\alpha$  se e somente se  $\alpha$  pertencer a todas as extensões de  $\Delta$ , ou seja, um método que forneça conclusões mais fortes a partir de uma teoria com defaults.

Em uma abordagem inicial, trabalharemos com teorias com defaults simples, ou seja, com defaults da forma  $(:L/L)$ , onde  $L$  é um literal. Este tipo de default mostrou-se adequado [CARV90b] na tarefa de estender a Hipótese do Mundo Fechado (HMF) [LLOY87,REIT78] ao contexto de cláusulas genéricas. A HMF permite que informações negativas sejam deduzidas a partir de um conjunto de cláusulas definidas: se um literal básico positivo  $L$  não é consequência lógica de um conjunto de cláusulas definidas  $Q$ , então deduza  $\neg L$  a partir de  $Q$ . Em se tratando de cláusulas genéricas, a HMF pode ser estendida a fim de permitir a inferência tanto de literais básicos negativos, assim como de literais básicos positivos. Entretanto, esta extensão foi cuidadosamente definida de forma a não permitir a inferência de um literal e seu complemento simultaneamente.

O método de dedução proposto neste trabalho, denominado Eliminação de Modelos Fraca com Geração de Lemas Fortes por Defaults, ou EMF/GLF, baseia-se na seguinte idéia. Um default ( $L/L$ ) só pode ser utilizado no processo de dedução se  $\neg L$  não pertencer a nenhuma extensão da teoria com defaults em questão, ou melhor, se  $L$  for consistente em relação a todas estas extensões. Neste caso, segundo a definição maximal de extensão,  $L$  pertenceria a todas as extensões desta teoria e seria o que definiremos como Lema Forte. Portanto, se existe uma prova de uma sentença  $\alpha$  a partir do conjunto de sentenças de primeira ordem de uma teoria com defaults acrescido do conjunto de lemas gerados, então  $\alpha$  também pertence a todas as extensões desta teoria com defaults.

O método EMF/GLF será definido a partir do método de primeira ordem chamado Eliminação de Modelos Fraca, ou EMF, apresentado em [GASA87, LOVE69]. Será adicionada a regra da Extensão Plena por Defaults ao sistema formal deste método. Cabe ressaltar, entretanto, que qualquer outro método de dedução de primeira ordem, refutacionalmente correto e completo, poderia ter sido adotado como base do método a ser proposto neste trabalho. Escolhemos o método EMF por ser linear de entrada, não utilizar fatoração e possuir uma estratégia de bloqueio de deduções que não contribuem para a obtenção da cláusula vazia. Apesar destas características, o método EMF é correto e completo.

Estruturamos este trabalho da seguinte forma: A seção 2 apresenta uma revisão do Método da Eliminação de Modelos Fraca e da Lógica de Defaults. A seção 3 define o Método EMF/GLF e apresenta alguns exemplos de sua utilização. A seção 4 discute o problema da completude forte em relação ao método proposto e, encerrando, a seção 5 apresenta as conclusões. (Todos os detalhes e demonstrações dos resultados apresentados neste trabalho podem ser encontrados em [CARV90a].)

## 2 - PRELIMINARES

### 2.1 - O Método da Eliminação de Modelos Fraca

O método EMF trabalha com seqüências de literais e literais resolvidos, chamadas cadeias. Os literais resolvidos, ou R-literais, são marcados com colchetes. Por este motivo, o alfabeto de primeira ordem em questão deve ser acrescido dos colchetes esquerdo e direito, "[" e "]".

**Definição 1:** Seja  $A$  um alfabeto de primeira ordem. Um *literal resolvido*, ou um *R-literal*, sobre  $A$  é uma expressão da forma  $[L]$ , onde  $L$  é um literal sobre  $A$ . Um *elemento* sobre  $A$  é um literal ou um R-literal sobre  $A$ . Uma *cadeia* sobre  $A$  é ou uma seqüência não vazia de elementos sobre  $A$  ou a *cadeia vazia*, denotada por " $\square$ ". Uma cadeia é *elementar* se e somente se é a cadeia vazia ou é uma cadeia sem ocorrências de R-literais.

Uma cadeia  $C$  é satisfável se e somente se o fecho universal da disjunção dos literais de  $C$  for satisfável. Por convenção, a cadeia vazia é sempre insatisfável. Note que os R-literais não influenciam a satisfatibilidade de uma cadeia.

**Definição 2:** Uma *representação em cadeias* de uma fórmula  $F$ , denotada por  $CD(F)$ , é um conjunto de cadeias elementares tal que  $F$  é satisfável se e somente se  $CD(F)$  é satisfável.

Note que um conjunto de cadeias elementares pode ser considerado, sem nenhuma restrição, como um conjunto de cláusulas. Desta forma, segundo o Algoritmo de

Representação Clausal apresentado em [CASA87], toda fórmula possui uma representação clausal e, conseqüentemente, uma representação em cadeias.

O sistema formal do método EMF contém duas regras de inferência: a extensão plena e a redução plena. Estas são combinações de outras três: extensão, redução e contração, a seguir definidas.

No que se segue, entendemos por uma renomeação para uma cadeia B em presença de uma cadeia A, uma substituição  $\beta$  tal que A e B $\beta$  não possuem variáveis em comum. Usaremos  $C_1C_2$  para denotar a concatenação de duas cadeias  $C_1$  e  $C_2$ . A notação  $|L|$  representa a fórmula atômica F, onde L é o literal F ou o literal  $\neg F$ . Além disto, a abreviação u.m.g. significa unificador mais geral cuja definição pode ser encontrada em [CASA87].

**Definição 3:** Sejam  $A'$ ,  $A''$  e C cadeias e  $\beta$  uma renomeação para  $A''$  em presença de  $A'$ . Seja  $L'$  o elemento mais à esquerda de  $A'$  e suponha que  $L'$  seja um literal.

(a) Uma cadeia A é uma *extensão* de  $A'$  por  $A''$  se e somente se existe um literal  $L''$  em  $A''$  e uma substituição  $\theta$  tais que:

- (i)  $L'$  e  $L''$  têm sinais opostos e  $\theta$  é um u.m.g. de  $\{|L'|, |L''\beta|\}$ ;
- (ii)  $A = B''B'$ , onde  $B''$  é a cadeia  $A''\beta\theta$  com o literal  $L''\beta\theta$  removido e  $B'$  é a cadeia  $A'\theta$  com o literal  $L'\theta$  transformado em um R-literal.

(b) Uma cadeia A é uma *redução* de  $A'$  se e somente se existe um R-literal  $M'$  em  $A'$  e uma substituição  $\theta$  tais que:

- (i)  $L'$  e  $M'$  têm sinais opostos e  $\theta$  é um u.m.g. de  $\{|L'|, |M'|\}$ ;
- (ii) A é a cadeia  $A'\theta$  com o literal  $L'\theta$  removido.

(c) Uma cadeia A é a *contração* de C se e somente se A é obtida removendo-se repetidamente o elemento mais à esquerda de C enquanto este for um R-literal.

(d) Uma cadeia A é uma *extensão plena* de  $A'$  por  $A''$  se e somente se A é a contração de uma extensão de  $A'$  por  $A''$ .

(e) Uma cadeia A é uma *redução plena* de  $A'$  se e somente se A é a contração de uma redução de  $A'$ .

**Definição 4:** O Sistema Formal da Eliminação de Modelos Fracos, ou S-EMF, consiste de:

-Classe de Linguagens: Linguagens das Cadeias.

-Axiomas: Nenhum.

-Regras de Inferência: Sejam  $A'$  e  $A''$  cadeias.

Extensão Plena (EX): Se A é uma extensão plena de  $A'$  por  $A''$ , então derive A de  $A'$  e  $A''$ ;

Redução Plena (RD): Se A é uma redução plena de  $A'$ , então derive A de  $A'$ .

**Definição 5:** Seja Q um conjunto de cadeias elementares. Seja B uma cadeia em Q e C uma cadeia qualquer.

(a) Uma *EMF-dedução* de C a partir de Q, iniciando-se em B, é uma seqüência  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ ,  $n \geq 1$ , de cadeias tal que:

- (i)  $C_1 = B$  e  $C_n = C$ ;

(ii) para todo  $i$ ,  $1 < i \leq n$ ,  $C_i$  é uma redução plena de  $C_{i-1}$  ou uma extensão plena de  $C_{i-1}$  por uma cadeia em Q.

(b) Uma *EMF-refutação* a partir de Q é uma EMF-dedução da cadeia vazia a partir de Q.

(c) Seja  $\alpha$  uma sentença. Uma *EMF-prova* de  $\alpha$  a partir de Q é uma EMF-refutação a partir de  $Q \cup CD(\neg\alpha)$ .

**Definição 6:** O Método da Eliminação de Modelos Fraca, ou EMF, consiste do par  $(S-EMF, EMF-D)$ , onde S-EMF é o Sistema Formal da Eliminação de Modelos Fraca e EMF-D é o conjunto das EMF-deduções.

Conforme mencionado anteriormente, o método EMF é refutacionalmente correto e completo. Para uma demonstração veja [LOVE69].

## 2.2 - A Lógica de Defaults

A Lógica de Defaults [REIT80] representa uma das alternativas utilizadas para formalizar o raciocínio não-monotônico. Permite estender a informação contida em uma teoria de primeira ordem através de regras de inferência especiais, denominadas defaults. Intuitivamente, os defaults expressam regras prevendo exceções, retratando o conhecimento impreciso ou incompleto denotado por expressões como "Normalmente" ou "Tipicamente".

**Definição 7:** Um default sobre um alfabeto de primeira ordem  $A$  é uma expressão da forma  $(A:B_1, B_2, \dots, B_n/C)$ , onde  $A, B_1, B_2, \dots, B_n, C$ ,  $n \geq 1$ , são fórmulas sobre  $A$ . A fórmula  $A$  será chamada pré-requisito e a fórmula  $C$ , conseqüente do default.

Um exemplo clássico da literatura é o default  $(Ave(x):Voa(x)/Voa(x))$  que representa a sentença: "Se  $x$  é uma ave e se é consistente afirmar que  $x$  voa, então conclua que  $x$  voa", ou simplesmente, "Tipicamente, aves voam".

Note que este tipo de raciocínio caracteriza-se pela não-monotonicidade, ou seja, o surgimento de um novo fato pode inviabilizar conclusões que até então eram consistentes. Por exemplo, suponha que, a partir do default acima e do fato "pingüim é uma ave", concluímos, na ausência de informação ao contrário, que "pingüim voa". O surgimento do fato "pingüim não voa" inviabiliza a conclusão anterior (que, de outra forma, seria inconsistente).

**Definição 8:** Um default da forma  $(A:B_1, B_2, \dots, B_n/C)$  é fechado se e somente se as fórmulas  $A, B_1, B_2, \dots, B_n, C$  são fechadas. Um default é normal se e somente se é da forma  $(A:B/B)$ . Um default é simples se e somente se é da forma  $(;B/B)$ , onde  $B$  é um literal. Todo default simples é um default normal sem pré-requisito.

**Definição 9:** Uma teoria com defaults sobre um alfabeto de primeira ordem  $A$  é um par  $(D, S)$ , onde  $D$  é um conjunto de defaults sobre  $A$  e  $S$  é um conjunto de sentenças sobre  $A$ .

**Definição 10:** Seja  $\Delta = (D, S)$  uma teoria com defaults.  $\Delta$  é fechada se e somente se todo default em  $D$  é fechado.  $\Delta$  é normal se e somente se todo default em  $D$  é normal.  $\Delta$  é simples se e somente se todo default em  $D$  é simples.

A definição a seguir trata das extensões de uma teoria com defaults fechada que, intuitivamente, são os conjuntos de sentenças de primeira ordem que podem, individualmente, ser aceitos como interpretações consistentes desta teoria.

A notação  $Th(F)$  representa o conjunto de todos os teoremas de um conjunto  $F$  de sentenças sobre um alfabeto de primeira ordem  $A$  ou, mais especificamente,  $Th(F) = \{w \mid w \text{ é uma sentença sobre } A \text{ e } F \vdash w\}$ .

**Definição 11:** Seja  $\Delta = (D, S)$  uma teoria com defaults fechada sobre um alfabeto de primeira ordem  $A$ . Seja  $F$  um conjunto de sentenças sobre  $A$ . Seja  $\Gamma(F)$  o menor conjunto com as seguintes propriedades:

- (i)  $S \subseteq \Gamma(F)$ ;
- (ii)  $\text{Th}(\Gamma(F)) = \Gamma(F)$ ;
- (iii) Se  $(A: B_1, B_2, \dots, B_n / C) \in D$ ,  $A \in \Gamma(F)$  e se, para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\neg B_i \notin F$ , então  $C \in \Gamma(F)$ .

Um conjunto  $E$  de sentenças sobre  $A$  é uma *extensão* de  $\Delta$  se e somente se  $\Gamma(E) = E$ , ou seja, se e somente se  $E$  é um ponto fixo do operador  $\Gamma$ .

Tendo a definição de extensão, seria interessante haver uma teoria de prova que, dada uma teoria com defaults  $\Delta$  e uma sentença  $\alpha$ , determinasse se existe uma extensão  $E$  de  $\Delta$  tal que  $\alpha \in E$ . Examinaremos, a seguir, uma teoria de prova para teorias com defaults normais e fechadas.

**Definição 12:** Seja  $D$  um conjunto de defaults normais e fechados.

- (a)  $\text{Pré-Req}(D)$  é a conjunção dos pré-requisitos de todos os defaults de  $D$ .
- (b)  $\text{Conseq}(D) = \{B \mid (A: B/B) \in D\}$ .

**Definição 13:** Seja  $\Delta = (D, S)$  uma teoria com defaults normal e fechada. Seja  $\alpha$  uma sentença. Uma seqüência finita  $(D_0, D_1, \dots, D_k)$ ,  $k \geq 0$ , de subconjuntos finitos de  $D$  é uma *prova com defaults* de  $\alpha$  a partir de  $\Delta$  se e somente se:

- (i)  $\text{SUConseq}(D_0) \vdash \alpha$ ;
- (ii)  $\text{SUConseq}(D_i) \vdash \text{Pré-Req}(D_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq k$ ;
- (iii)  $D_k \neq \emptyset$ ;
- (iv)  $\text{SU} \bigcup_{i=0}^k \text{Conseq}(D_i)$  é satisfatível.

Note que, para as teorias com defaults sem pré-requisitos, as condições (ii) e (iii) da definição acima não se fazem necessárias. Por este mesmo motivo, qualquer prova com defaults a partir destas teorias pode ser representada pelo conjunto  $D_0$ . Portanto, neste caso, a condição (iv) se reduz à  $\text{SUConseq}(D_0)$  ser satisfatível.

Cabe ressaltar que os resultados a serem apresentados neste trabalho utilizam, em uma primeira abordagem, teorias com defaults simples. A seguir, simplificaremos a definição de prova top-down com defaults, apresentada em [REIT80], de forma a adaptá-la às teorias com defaults simples. Além disto, utilizaremos, como método de prova de primeira ordem, a Eliminação de Modelos Fraca no lugar de Resolução Linear, utilizada na definição original. Ambos os métodos são refutacionalmente corretos e completos.

Sem perda de generalidade, considere, no que se segue, que o conjunto  $Q$  de sentenças de uma teoria com defaults simples  $\Delta = (D, Q)$  é um conjunto de cadeias satisfatível.

**Definição 14:** Seja  $\Delta = (D, Q)$  uma teoria com defaults simples e fechada. Seja  $\alpha$  uma sentença. Uma EMF-prova  $P$  é uma *prova top-down com defaults* de  $\alpha$  a partir de  $\Delta$  se e somente se:

- (a)  $P$  é uma EMF-prova de  $\alpha$  a partir de  $\text{QUConseq}(D)$ ;
- (b)  $\text{QUConseq}(D')$  é satisfatível, onde  $D' \subseteq D$  tal que todo literal em  $\text{Conseq}(D')$  foi utilizado em  $P$ .

Noté que  $\text{Conseq}(D)$  é um conjunto de literais e pode, portanto, ser considerado como um conjunto de cadeias.

Podemos implementar o teste de satisfatibilidade de  $\text{QUConseq}(D')$  através da construção de árvores de EMF-refutação [CASA87]. Cabe lembrar, entretanto, que testar a satisfatibilidade de um conjunto de cadeias é um problema indecidível, nem mesmo parcialmente decidível.

Segundo [REIT80], este método de prova top-down com defaults é correto e completo. As adaptações que fizemos na definição de prova top-down com defaults não comprometem tais características.

Terminaremos esta seção examinando o conceito de extensão para teorias com defaults simples. Utilizaremos, para isto, o conceito de *Fecho de uma Teoria com Defaults Simples* - uma particularização do conceito de *Fecho de uma Teoria com Defaults na Forma Skolemizada*, apresentado em [REIT80]. No que se segue, um termo básico é um termo sem variáveis.

**Definição 15:** Seja  $\Delta = (D, S)$  uma teoria com defaults simples sobre um alfabeto de primeira ordem  $A$ . O *fecho* de  $\Delta$ , denotado por  $\text{Fecho}(\Delta)$ , é a teoria com defaults simples e fechada definida por  $\text{Fecho}(\Delta) = (F(D), S)$ , onde  $F(D) = \{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid \partial(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, n \geq 0, \text{ onde } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ são as variáveis livres do default } \partial \text{ e } t_1, t_2, \dots, t_n \text{ são termos básicos sobre } A\}$ .

**Definição 16:** Seja  $\Delta$  uma teoria com defaults simples. Seja  $E$  um conjunto de sentenças.  $E$  é uma *extensão* de  $\Delta$  se e somente se  $E$  é uma extensão de  $\text{Fecho}(\Delta)$ .

### 3 - O MÉTODO FORTEMENTE CORRETO

Nesta seção, definiremos o Método da Eliminação de Modelos Fraca com Geração de Lemas Fortes por Defaults, ou EMF/GLF. O desenvolvimento deste método de dedução para a lógica de defaults objetiva um procedimento capaz de determinar se uma sentença pertence a todas as extensões de uma teoria com defaults.

O sistema formal deste método, além das regras do sistema formal S-EMF, extensão plena e redução plena, possui a regra da extensão por defaults plena. Dado um conjunto de defaults simples  $D$ , esta regra consiste, basicamente, em eliminar o primeiro literal da cadeia em questão mediante a utilização de um default em  $D$ .

**Definição 17:** Seja  $D$  um conjunto de defaults simples. Seja  $A'$  uma cadeia da forma  $L_1 L_2 \dots L_n$ ,  $n \geq 1$ , onde  $L_1$  é um literal. Seja  $L$  um literal. Seja  $\beta$  uma renomeação para  $L$  em presença de  $A'$ .

(a) Uma cadeia  $A$  é uma *extensão por defaults* de  $A'$  em presença de  $D$  se e somente se  $(L/L) \in D$  e existe uma substituição  $\theta$ , onde:

(i)  $L_1$  e  $L$  têm sinais opostos e  $\theta$  é um u.m.g. de  $\{L_1, L\beta\}$ ;

(ii)  $A = "L_2 \dots L_n \theta"$ .

(b) Uma cadeia  $A$  é uma *extensão por defaults plena* de  $A'$  em presença de  $D$  se e somente se  $A$  é a contração da extensão por defaults de  $A'$  em presença de  $D$ .

**Definição 18:** O Sistema Formal da Eliminação de Modelos Fraca, com Geração de Lemas Fortes por Defaults, ou *S-GLF*, consiste de:

-Classe de Linguagens: Conjunto das Teorias com Defaults Simples.

-Axiomas: Nenhum.

-Regras de Inferência: Sejam  $A'$  e  $A''$  cadeias.

Extensão Plena (EX): Se  $A$  é uma extensão plena de  $A'$  por  $A''$ , então derive  $A$  de  $A'$  e  $A''$ ;

Redução Plena (RD): Se  $A$  é uma redução plena de  $A'$ , então derive  $A$  de  $A'$ ;

Extensão por Defaults Plena (ED): Seja  $D$  um conjunto de defaults simples. Se  $A$  é uma extensão por defaults plena de  $A'$  em presença de  $D$ , então derive  $A$  de  $A'$  e  $D$ .

O método EMF/GLF está baseado na seguinte idéia. Um default ( $:L/L$ ) só pode ser utilizado se  $\neg L$  não pertencer a nenhuma extensão da teoria com defaults em questão, ou melhor, se  $L$  for consistente em relação a todas as extensões desta teoria. Neste caso, segundo a definição maximal de extensão,  $L$  pertenceria a todas as extensões em questão.

No processo de dedução, sempre que um default ( $:L/L$ ) for utilizado, será gerado um lema forte  $L$ . Portanto, devemos sempre testar se o lema forte  $L$  gerado é consistente em relação a todas as extensões. Para tanto, utilizaremos o método de prova top-down com defaults que responderá, de forma correta e completa, se  $\neg L$  pertence a alguma extensão da teoria com defaults em questão. Chamamos este procedimento de teste de consistência.

Um lema forte deve ser básico para ser submetido ao teste de consistência (lembre-se que o método de prova top-down com defaults utilizará o fecho da teoria com defaults simples em questão). Os lemas fortes básicos são testados assim que gerados. Os não básicos são testados assim que instanciados por substituições relativas às regras de extensão plena e redução plena utilizadas durante a dedução. Se ao final da dedução existir algum lema forte com variáveis livres, este será instanciado com constantes de Skolem [REIT80]. Logo, devemos considerar o alfabeto de primeira ordem adotado acrescido das constantes de Skolem.

A vantagem de se testar um lema forte assim que possível é evitar prolongar uma dedução que possua um lema forte não consistente em relação a alguma extensão.

A definição de dedução neste novo método deve, de alguma forma, guardar os lemas fortes gerados para que possam ser utilizados em derivações posteriores. Deve, ainda, possuir uma estrutura que mantenha separados os lemas fortes testados e os não testados. Portanto, formalizaremos a dedução como uma seqüência de triplas formadas por cadeias e dois conjuntos de lemas, de modo que a tripla derivada contenha a cadeia derivada ( $C_i$ ), o conjunto de lemas fortes testados ( $S_i$ ) e o conjunto de lemas fortes não testados ( $N_i$ ) até o momento.

**Definição 19:** Seja  $\Delta = (D, Q)$  uma teoria com defaults simples. Seja  $\alpha$  uma sentença. Seja  $B$  uma cadeia em  $CD(\neg\alpha)$  e  $C$  uma cadeia qualquer. Uma *EMF/GLF-dedução* de  $C$  a partir de  $\Delta$  e  $CD(\neg\alpha)$ , iniciando-se em  $B$ , é uma seqüência de triplas  $((C_1, S_1, N_1), (C_2, S_2, N_2), \dots, (C_n, S_n, N_n))$ ,  $n \geq 1$ , onde  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , é uma cadeia,  $S_i$  é um conjunto de literais básicos e  $N_i$  é um conjunto de literais, chamados, respectivamente, *conjunto de lemas fortes testados* e *conjunto de lemas fortes não testados*, tais que:

- (i)  $C_1 = B$ ,  $S_1 = \emptyset$  e  $N_1 = \emptyset$ ;
- (ii) para todo  $i$ ,  $1 < i \leq n$ , a tripla  $(C_i, S_i, N_i)$  é derivada de  $(C_{i-1}, S_{i-1}, N_{i-1})$  através da utilização de uma das regras de inferência do sistema formal S-GLF e da possível aplicação de um teste de consistência, conforme indicado a seguir:

-  $C_i$  é uma extensão plena de  $C_{i-1}$  por uma cadeia pertencente ao conjunto  $QUCD(\neg\alpha)US_{i-1}UN_{i-1}$  com substituição  $\theta_{i-1}$ , ou

-  $C_i$  é uma redução plena de  $C_{i-1}$  com substituição  $\theta_{i-1}$ , ou

-  $C_i$  é uma extensão por defaults plena de  $C_{i-1}$  em presença de  $D$  com substituição  $\theta_{i-1}$ .

Além disto, se  $C_i$  foi obtida de  $C_{i-1}$  através da extensão ou redução plena, considere  $L = \emptyset$ , caso contrário, se  $C_i$  foi obtida de  $C_{i-1}$  através da extensão por defaults plena, considere  $L = \{\neg L'\theta_{i-1}\}$ , onde  $L'$  é o literal mais à esquerda de  $C_{i-1}$ .  $\neg L'$  é um *lema forte*. A partir de  $S_{i-1}$ ,  $N_{i-1}$ ,  $L$  e  $\theta_{i-1}$ , definem-se então  $S_i$  e  $N_i$ :

-  $S_i = S_{i-1} \cup B'$ , onde  $B'$  é o subconjunto dos literais básicos de  $N_{i-1}\theta_{i-1}UL$  e, para cada literal  $L''$  em  $B'$ , não existe uma prova top-down com defaults de  $\neg L''$  a partir de  $\text{Fecho}(\Delta)$ , e

-  $N_i = (N_{i-1}\theta_{i-1}UL) - B'$ .

- (iii)  $C = C_n\beta$  e  $S = S' \cup N_n\beta$ , tal que  $S$  é um conjunto de literais básicos chamado *conjunto final de lemas fortes*, onde:

-  $\beta = \{x_1/e_1, x_2/e_2, \dots, x_m/e_m\}$ ,  $n \geq 0$ , onde  $x_1, x_2, \dots, x_m$  são as variáveis dos literais em  $N_n$  e  $e_1, e_2, \dots, e_m$  são constantes de Skolem incluídas no alfabeto de primeira ordem adotado;

-  $N_n\beta$  é básico, e

- para cada literal  $L'$  em  $N_n\beta$ , não existe uma prova top-down com defaults de  $\neg L'$  a partir de  $\text{Fecho}(\Delta)$ .

**Definição 20:** Seja  $\Delta$  uma teoria com defaults simples. Seja  $\alpha$  uma sentença. Seja  $B$  uma cadeia em  $CD(\neg\alpha)$ .

- (a) Uma *EMF/GLF-refutação* a partir de  $\Delta$  e  $CD(\neg\alpha)$ , iniciando-se em  $B$ , é uma EMF/GLF-dedução da cadeia vazia a partir de  $\Delta$  e  $CD(\neg\alpha)$ , iniciando-se em  $B$ .
- (b) Uma *EMF/GLF-prova* de  $\alpha$  a partir de  $\Delta$  é uma EMF/GLF-refutação a partir de  $\Delta$  e  $CD(\neg\alpha)$ , iniciando-se em alguma cadeia em  $CD(\neg\alpha)$ .

**Definição 21:** O *Método da Eliminação de Modelos Fraca com Geração de Lemas Fortes por Defaults*, ou *EMF/GLF*, consiste do par  $(S\text{-GLF}, \text{GLF-D})$ , onde S-GLF é o Sistema Formal da Eliminação de Modelos com Geração de Lemas Fortes por Defaults e GLF-D é o conjunto das EMF/GLF-deduções.

**Definição 22:** Seja  $\Delta$  uma teoria com defaults simples. Uma sentença  $\alpha$  é *consequência lógica forte* de  $\Delta$  se e somente se  $\alpha$  pertence a todas as extensões de  $\Delta$ .

**Teorema:** Correção Forte do Método EMF/GLF.

Seja  $\Delta$  uma teoria com defaults simples. Seja  $\alpha$  uma sentença. Se existe uma EMF/GLF-prova de  $\alpha$  a partir de  $\Delta$ , então  $\alpha$  é consequência lógica forte de  $\Delta$ .

(A demonstração deste resultado encontra-se em [CARV90a].)

**EXEMPLOS:**

Seja  $\Delta = (D, Q)$  uma teoria com defaults simples, onde:

- $D = \{(:\neg q(x)/\neg q(x)), (:\neg s(x)/\neg s(x)), (:\neg t(x)/\neg t(x))\}$ ;
- $Q = \{p(a)q(a), q(a)r(a), r(a)s(a), s(a)t(a)\}$ .

Note que  $\Delta$  possui duas extensões (considere "a" a única constante do alfabeto em questão):

- (i)  $E_1 = \text{Th}(QU\{\neg q(a), \neg s(a)\})$ ;
- (ii)  $E_2 = \text{Th}(QU\{\neg q(a), \neg t(a)\})$ .

(a) Seja  $\alpha_a = p(a)$ . Observe que  $\alpha_a$  é consequência lógica forte de  $\Delta$ .

A seqüência abaixo, a partir da tripla (5), representa uma EMF/GLF-prova de  $\alpha_a$  a partir de  $\Delta$ .

1.  $p(a) q(a)$  .cadeia de Q
2.  $q(a) r(a)$  .cadeia de Q
3.  $r(a) s(a)$  .cadeia de Q
4.  $s(a) t(a)$  .cadeia de Q
5.  $(\neg p(a), \emptyset, \emptyset)$  .cadeia de  $CD(\neg\alpha_a)$
6.  $(q(a) [\neg p(a)], \emptyset, \emptyset)$  .EX 1a
7.  $(\square, \{\neg q(a)\}, \emptyset)$  .ED

Note que  $S_7 = \{\neg q(a)\}$  dado que não existe uma prova top-down com defaults de  $q(a)$  a partir de  $\text{Fecho}(\Delta)$  ( $q(a)$  não pertence a nenhuma extensão de  $\Delta$ ).

(b) Seja  $\alpha_b = \neg q(a) \wedge r(a)$ . Observe que  $\alpha_b$  é consequência lógica forte de  $\Delta$ .

A seqüência abaixo, a partir da tripla (5), representa uma EMF/GLF-prova de  $\alpha_b$  a partir de  $\Delta$ .

- 1 - 4. cadeias de Q (veja item (a))
5.  $(q(a) \neg r(a), \emptyset, \emptyset)$  .cadeia de  $CD(\neg\alpha_b)$
6.  $(\neg r(a), \{\neg q(a)\}, \emptyset)$  .ED
7.  $(q(a) [\neg r(a)], \{\neg q(a)\}, \emptyset)$  .EX 2b
8.  $(\square, \{\neg q(a)\}, \emptyset)$  .EX Lemal

Note que  $S_8 = \{\neg q(a)\}$  dado que não existe uma prova top-down com defaults de  $q(a)$  a partir de  $\text{Fecho}(\Delta)$  ( $q(a)$  não pertence a nenhuma extensão de  $\Delta$ ).

(c) Seja  $\alpha_c = t(a)$ .

A seqüência abaixo representa uma tentativa fracassada e exaustiva de se obter uma EMF/GLF-prova de  $\alpha_c$  a partir de  $\Delta$ . Na realidade,  $\alpha_c$  não é consequência lógica forte de  $\Delta$ .  $\alpha_c$  pertence apenas a uma extensão de  $\Delta$ .

- 1 - 4. cadeias de Q (veja item (a))
5.  $(\neg t(a), \emptyset, \emptyset)$  .cadeia de  $CD(\neg\alpha_c)$
6.  $(s(a) [\neg t(a)], \emptyset, \emptyset)$  .EX 4b

Observe que a regra ED pode ser aplicada à cadeia de (6), entretanto,  $S_7$  não pode ser definido, pois existe uma prova top-down com defaults de  $s(a)$  a partir de  $\text{Fecho}(\Delta)$  ( $s(a)$  pertence a uma extensão de  $\Delta$ ). Portanto, a dedução é bloqueada.

(d) Seja  $\alpha_d = q(a)$ .

A seqüência abaixo representa uma tentativa fracassada de se obter uma EMF/GLF-prova de  $\alpha_d$  a partir de  $\Delta$ .

1 - 4. cadeias de Q (veja item (a))

5.  $(\neg q(a), \emptyset, \emptyset)$  .cadeia de CD( $\neg\alpha_d$ )

6.  $(p(a) [\neg q(a)], \emptyset, \emptyset)$  .EX 1b

Observe que nenhuma regra pode ser aplicada à cadeia de (6).

A seqüência seguinte esgota as tentativas de se obter uma EMF/GLF-prova de  $\alpha_d$  a partir de  $\Delta$ . Na realidade,  $\alpha_d$  não é consequência lógica forte de  $\Delta$ , nem mesmo pertence a alguma extensão de  $\Delta$ .

1 - 4. cadeias de Q (veja item (a))

5.  $(\neg q(a), \emptyset, \emptyset)$  .cadeia de CD( $\neg\alpha_d$ )

6'.  $(r(a) [\neg q(a)], \emptyset, \emptyset)$  .EX 2a

Note que nenhuma regra pode ser aplicada à cadeia de (6').

#### 4 - DISCUSSÃO SOBRE A COMPLETUDE FORTE

Entendemos por *completude forte* do método EMF/GLF a seguinte propriedade: se uma sentença  $\alpha$  pertence a todas as extensões de uma teoria com defaults simples  $\Delta$ , então existe uma EMF/GLF-prova de  $\alpha$  a partir de  $\Delta$ .

O exemplo a seguir mostra que a versão do método EMF/GLF apresentada na seção 3, apesar de fortemente correta, não é fortemente completa.

Seja  $\Delta = (D, Q)$  uma teoria com defaults simples, onde:

- $D = \{(:\neg q(x)/\neg q(x)), (:\neg r(x)/\neg r(x))\}$ ;
- $Q = \{p(a)q(a), p(a)r(a), q(a)r(a)\}$ .

Note que  $\Delta$  possui duas extensões (considere "a" a única constante do alfabeto em questão):

(i)  $E_1 = \text{Th}(QU\{\neg q(a)\})$ ;

(ii)  $E_2 = \text{Th}(QU\{\neg r(a)\})$ .

Seja  $\alpha = p(a)$ . Perceba que  $\alpha$  pertence a todas as extensões de  $\Delta$  e, portanto,  $\alpha$  é consequência lógica forte de  $\Delta$ . Entretanto, de acordo com o que se segue, não há uma EMF/GLF-prova de  $\alpha$  a partir de  $\Delta$ .

A seqüência abaixo representa uma tentativa fracassada de se obter uma EMF/GLF-prova de  $\alpha$  a partir de  $\Delta$ .

1.  $p(a) q(a)$  .cadeia de Q

2.  $p(a) r(a)$  .cadeia de Q

3.  $q(a) r(a)$  .cadeia de Q

4.  $(\neg p(a), \emptyset, \emptyset)$  .cadeia de CD( $\neg\alpha$ )

5.  $(q(a) [\neg p(a)], \emptyset, \emptyset)$  .EX 1a

Observe que a regra ED pode ser aplicada à cadeia de (5), entretanto,  $S_6$  não pode ser definido, pois existe uma prova top-down com defaults de  $q(a)$  a partir de  $\text{Fecho}(\Delta)$  ( $q(a)$  pertence a uma extensão de  $\Delta$ ). Portanto, a dedução é bloqueada.

A seqüência seguinte esgota as tentativas de se obter uma EMF/GLF-prova de  $\alpha$  a partir de  $\Delta$ .

4.  $(\neg p(a), \emptyset, \emptyset)$  cadeia de  $CD(\neg\alpha)$

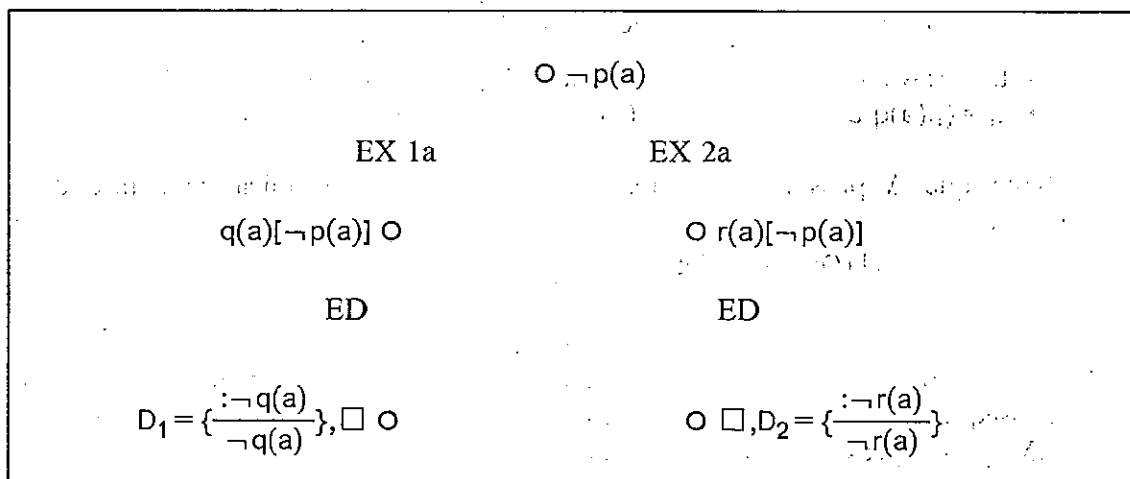
5'.  $(r(a) [\neg p(a)], \emptyset, \emptyset)$  EX 2a

Observe que a regra ED pode ser aplicada à cadeia de (5'), entretanto,  $S_6$  não pode ser definido, pois existe uma prova top-down com defaults de  $r(a)$  a partir de  $\text{Fecho}(\Delta)$  ( $r(a)$  pertence a uma extensão de  $\Delta$ ). Portanto, a dedução é bloqueada.

Estamos estudando, para um trabalho futuro, uma nova versão deste método com o objetivo de torná-lo fortemente correto e completo. Apresentaremos, a seguir, algumas idéias que norteiam esta nova versão.

Seja uma R-árvore de refutação para uma teoria com defaults simples  $\Delta$  e uma sentença  $\alpha$  a árvore cujos ramos representam as tentativas de se obter uma prova top-down com defaults de  $\alpha$  a partir de  $\text{Fecho}(\Delta)$ . Um R-ramo de sucesso representa uma prova.

Voltando ao exemplo anterior, note que as tentativas de se obter uma EMF/GLF-prova de  $p(a)$  a partir de  $\Delta$  falharam pois nenhum dos lemas  $\neg q(a)$  ou  $\neg r(a)$  pertencem a todas as extensões de  $\Delta$ . Entretanto,  $\neg q(a)$  ou  $\neg r(a)$ , ou melhor,  $\neg q(a) \vee \neg r(a)$  pertence a todas as extensões de  $\Delta$ . Portanto, como os lemas  $\neg q(a)$  e  $\neg r(a)$ , separadamente, implicam  $p(a)$ , então  $p(a)$  também pertence a todas as extensões de  $\Delta$ . Observe a R-árvore de refutação para  $\Delta$  e  $p(a)$  a seguir.



onde  $D_1$  e  $D_2$  são os conjuntos de defaults utilizados em cada prova top-down com defaults de  $p(a)$ .

Tudo leva a crer que a cada R-ramo de sucesso desta árvore está associada uma extensão à qual  $p(a)$  pertence. Generalizando, acreditamos que cada extensão de uma teoria com defaults simples  $\Delta$ , à qual uma sentença  $\alpha$  pertence, está associada a um R-ramo de sucesso na R-árvore de refutação para  $\Delta$  e  $\alpha$ :

Note que a sentença  $\neg q(a) \vee \neg r(a)$  equivale a disjunção dos conseqüentes dos defaults utilizados nos ramos de sucesso da R-árvore em questão.

Devemos, então, verificar se  $\neg q(a) \vee \neg r(a)$  pertence a todas as extensões de  $\Delta$ . Para tanto, precisamos ratificar que  $q(a) \wedge r(a)$  não pertence a nenhuma extensão de  $\Delta$ . Utilizando, por exemplo, o próprio método de prova top-down com defaults.

Portanto, a nova versão do método EMF/GLF deverá estar baseada no seguinte procedimento, o qual acreditamos determinar, de forma correta e completa, se uma sentença  $\alpha$  pertence a todas as extensões de uma teoria com defaults simples  $\Delta$ . Construa a R-árvore de refutação para  $\Delta$  e  $\alpha$ . Ao atingir um R-ramo de sucesso, avalie se a disjunção das conjunções dos lemas de cada R-ramo de sucesso construído até então pertence a todas as extensões de  $\Delta$ . Em caso afirmativo,  $\alpha$  também pertence a todas as extensões de  $\Delta$ . Caso contrário, continue a construção da árvore.

## 5 - CONCLUSÕES

Apresentamos, neste trabalho, um método de dedução fortemente correto para teorias com defaults simples, ou seja, um método que fornece uma prova de uma sentença  $\alpha$  somente se  $\alpha$  pertence a todas as extensões de uma teoria com defaults simples.

Estamos estudando, para um próximo trabalho, a definição de uma nova versão deste método caracterizada pela completude forte, baseando-se nas idéias apresentadas na seção 4. Estamos interessados também em estender o método para teorias com defaults com um maior poder de expressão. Em um primeiro passo, para teorias com defaults normais sem pré-requisito. Para tanto, criaremos um mapeamento deste tipo de teorias com defaults para teorias com defaults simples. Em um segundo passo, para teorias com defaults normais. Quando, então, os pré-requisitos dos defaults disparados devem ser submetidos a testes que verifiquem se estes também pertencem a todas as extensões da teoria com defaults em questão.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [CARV90a] A.P.Carvalho, "Um Método de Dedução Não-Monotônico Baseado em Eliminação de Modelos", Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Brasil, 1990.
- [CARV90b] A.P.Carvalho, M.A.Casanova e S.R.M.Veloso, "Um Método de Dedução Não-Monotônico e Parametrizado Baseado em Eliminação de Modelos", Anais do VII Simpósio Brasileiro de Inteligência Artificial, Brasil, 1990.
- [CASA87] M.A.Casanova, F.A.C.Giorno e A.L.Furtado, *Programação em Lógica e a Linguagem Prolog*, Rio de Janeiro, Editora Blücher, Primeira Edição, 1987.
- [LLOY87] J.W.Lloyd, *Foundations of Logic Programming*, Springer-Verlag, Germany, Second Extended Edition, 1987.
- [LOVE69] D.W.Loveland, "A Simplified Format for the Model Elimination Theorem-Proving Procedure", *Journal of the ACM*, vol. 16, num. 3, 1969, 349-363.
- [REIT78] R.Reiter, "On Closed World Databases", *Logic and Databases*, H. Gallaire and J. Minker (eds.), Plenum Press, New York, 1978, 55-76.
- [REIT80] R.Reiter, "A Logic for Default Reasoning", *Artificial Intelligence*, vol. 13, nums. 1-2, 1980, 81-132.