075

Raciocínio matemático em lógica de defaults

RAMIRO A. DE T. GUERREIRO
ANDREA S. HEMERLY
MARCO A. CASANOVA

Centro Científico Rio - IBM Brasil

RESUMO
Neste trabalho investiga-se como algumas formas usuais de raciocínio matemático podem ser aplicadas, de modo semelhante, à lógica de defaults. Primeiro, apresenta-se algumas formas que são válidas para teorias com defaults arbitrárias, sem restrições, como aquelas capturadas pelo Teorema da Generalização e a Regra EI. Em seguida, descreve-se classes especiais de teorias com defaults para as quais valem, por exemplo, resultados equivalentes ao Teorema da Dedução e à regra Modus Ponens. Por fim, focaliza-se teorias com defaults onde o Teorema da Dedução pode ser aplicado.

ABSTRACT
This work investigates how familiar patterns of mathematical reasoning can be applied, in an equivalent way, to default logic. It first demonstrates that certain patterns, such as those captured by the Generalization Theorem and Rule EI, can be applied to arbitrary default theories. Then, it describes special classes of default theories where results equivalent to the Deduction Theorem and to the Modus Ponens rule, for example, hold. Finally, this work focus on default theories where the Deduction Theorem is valid.

PALAVRAS-CHAVE:

- Raciocínio matemático
- Raciocínio não-monotônico
- *Defaults*
- Teorema da dedução

RECEBIDO EM: 09/89

ENDEREÇO DOS AUTORES PARA CORRESPONDÊNCIA:
Centro Científico Rio
IBM Brasil
Caixa Postal 4624
20001 - Rio de Janeiro - RJ
Tel.: 271-3789

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

Vários pesquisadores em Inteligência Artificial têm concentrado bastante esforço no sentido de capturar a habilidade das pessoas de agirem "racionalmente" na falta de um conhecimento completo e bem definido sobre as situações. Como o conhecimento de um agente sobre o mundo é necessariamente incompleto, por diversas vezes ele é forçado a tirar conclusões baseadas neste conhecimento incompleto. Assim, suposições e hipóteses são feitas implicita ou explicitamente. Claramente, estas suposições e hipóteses deverão ser revistas quando mais tarde uma nova evidência provar que elas são inválidas. Se isto ocorrer, todas as conclusões baseadas nestas suposições e hipóteses também têm de ser revistas. Isto faz com que qualquer sistema que trabalhe consistentemente com suposições e hipóteses exiba um comportamento não monotônico.

A lógica de defaults (Reiter [1980]) é uma proposta interessante para formalizar raciocínio não monotônico. Esta abordagem permite derivar conclusões tais como "o pássaro Tweety vôa" baseado em *regras default* ou, simplesmente, *defaults*, como:

$$D_1: \quad \frac{\mathrm{passaro}(x) : \mathrm{voa}(x)}{\mathrm{voa}(x)}$$

cujo significado é "se x é um pássaro e é consistente assumir que x vôa, então infira que x vôa". Logo, na presença de passaro(Tweety), podemos concluir voa(Tweety). Assim, da teoria com defaults $\Delta = (\{D_1\},\{\mathrm{passaro(Tweety)}\})$ nós podemos deduzir voa(Tweety).

Dada uma teoria com defaults Δ e uma sentença α, suponha que α seja consequência de Δ. Quais estratégias de prova podem ser utilizadas para demonstrar tal fato? Este trabalho enfoca o problema indicando sob quais condições algumas estratégias comuns em Matemática, capturadas geralmente sob forma de metateoremas da lógica de primeira ordem (veja Enderton [1972]), valem para a lógica de defaults.

Brevemente, alguns destes metateoremas são diretamente adaptáveis à lógica de defaults como, por exemplo, o Teorema da Generalização e a Regra EI. Por outro lado, outros metateoremas, como o Teorema da Contraposição, exigem restrições severas às teorias com defaults para serem válidos. Assim, vários destes metateoremas não parecem ser aplicáveis à lógica de defaults. A maior parte deste trabalho concentra-se em classes de teorias com defaults onde um similar ao Teorema da Dedução se aplica.

O Teorema da Dedução é particularmente interessante pois captura raciocínio hipotético em lógica de defaults, entendido neste caso como a seguinte estratégia para estabelecer que uma sentença da forma $\alpha \Rightarrow \beta$ segue a partir de um conjunto de sentenças W e de um conjunto de defaults D:

1) tente estabelecer β a partir de $W \cup \{\alpha\}$ e D;
2) se o passo 1 tiver sucesso, conclua que é possível estabelecer $\alpha \Rightarrow \beta$ a partir de W e D.

Note que esta estratégia deve ser justificada por um metateorema indicando que, se a dedução indicada no passo 1 existe, então a dedução desejada no passo 2 também existe.

Infelizmente, o raciocínio hipotético não é válido de maneira geral em lógica de defaults. Este fato acarreta mais consequências que a nossa definição informal de raciocínio hipotético possa sugerir à primeira vista. Por exemplo, assuma que o default D_1 e a sentença

$$\text{passaro(Tweety)} \vee \text{passaro(Piupiu)}$$

sejam válidos e suponha que não exista nenhuma informação sobre quem é de fato pássaro. Logo, não é possível se derivar

$$\text{voa(Tweety)} \vee \text{voa(Piupiu)},$$

mesmo na falta de qualquer informação em contrário. Isto é, o default não pode ser usado considerando-se as hipóteses "Tweety é um pássaro" ou "Piupiu é um pássaro".

Definiremos então neste trabalho uma condição suficiente indicando quando uma classe de defaults é compatível com raciocínio hipotético e descreveremos várias transformações que mapeiam defaults normais, um tipo de defaults bem investigado, em defaults da classe apropriada. Discutiremos também várias propriedades formais das transformações e daremos uma interpretação informal para elas.

Ilustrando, uma das transformações reescreve o default D_1 como:

$$D_2: \quad \frac{:\text{passaro}(x) \Rightarrow \text{voa}(x)}{\text{passaro}(x) \Rightarrow \text{voa}(x)}$$

É fácil observar que, sem qualquer informação em contrário, o default D_2 nos dá:

C_1: $\text{passaro(Tweety)} \Rightarrow \text{voa(Tweety)}$
C_2: $\text{passaro(Piupiu)} \Rightarrow \text{voa(Piupiu)}$

Assim, de D_2 e

$$\text{passaro(Tweety)} \vee \text{passaro(Piupiu)}$$

podemos deduzir:

$$\text{voa(Tweety)} \vee \text{voa(Piupiu)}$$
$$\text{passaro(Tweety)} \vee \text{voa(Piupiu)}$$
$$\text{voa(Tweety)} \vee \text{passaro(Piupiu)}$$

Como um exemplo final, considere as sentenças $\text{passaro(Tweety)} \vee \text{passaro(Piupiu)}$ e $\neg\,\text{voa(Piupiu)}$. Usando o default D_1, nós não podemos estender nosso conhecimento. Porém, usando o default D_2, nós podemos concluir:

$$\neg\,\text{passaro(Piupiu)}$$
$$\text{voa(Tweety)}$$
$$\text{passaro(Tweety)}$$

Por exemplo, a derivação de $\neg\,\text{passaro(Piupiu)}$ segue-se observando que C_2 é equivalente a $\neg\,\text{voa(Piupiu)} \Rightarrow \neg\,\text{passaro(Piupiu)}$.
Intuitivamente, se formalizamos "Em geral, pássaros voam" como o default D_2, então, a partir de "Piupiu não vôa", podemos deduzir que "Piupiu não é um pássaro". Note que a transformação dada mapeia os defaults $(\alpha{:}\omega/\omega)$ e $(\neg\omega{:}\neg\alpha/\neg\alpha)$ em defaults equivalentes, quais sejam, $(:\alpha \Rightarrow \omega/\alpha \Rightarrow \omega)$ e $(:\neg\omega \Rightarrow \neg\alpha/\neg\omega \Rightarrow \neg\alpha)$.

Este trabalho está assim organizado. Na seção 2 coletamos alguns resultados básicos sobre defaults. Na seção 3 estudamos alguns metateoremas de lógica de primeira ordem no contexto de lógica de defaults. Na seção 4 investigamos uma classe de teorias com defaults onde um similar do Teorema da Dedução é válido e estendemos este resultado definindo três mapeamentos entre teorias com defaults. Finalmente, na seção 5, apresentamos as conclusões.

2. PRELIMINARES

Nesta seção revemos brevemente alguns conceitos da lógica de defaults. Um desenvolvimento detalhado desta pode ser encontrado em Reiter [1980].

Um *default fechado* é uma expressão da forma $(\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_m/\omega)$ onde α, β_i e ω são sentenças de primeira ordem, i.e., fórmulas de primeira ordem sem variáveis livres. α, β_i e ω são chamadas *pre-requisito*, *justificativa* e *consequente* do default, respectivamente. Uma *teoria com defaults fechados* $\Delta=(D,W)$ consiste em um conjunto de sentenças de primeira ordem W e um conjunto de defaults fechados D. Um *default normal fechado* é um default fechado da forma $(\alpha:\omega/\omega)$. Uma *teoria com defaults normais fechados* é uma teoria com defaults fechados (D,W) onde D é um conjunto de defaults normais fechados. Como trabalharemos apenas com defaults fechados, omitiremos a palavra "fechado(s)" daqui em diante.

Para um conjunto de sentenças S, definimos $\mathrm{Th}(S)=\{\omega|\omega$ é uma sentença e $S\vdash\omega\}$. Uma *extensão* E de uma teoria com defaults é um ponto fixo maximal, $E=\mathrm{Th}(E)$, fechado sob a relação "$\vdash$", contendo todos os fatos conhecidos, incluindo os consequentes de qualquer default cujo pre-requisito é satisfeito por E e cujas justificativas são consistentes com E.

Sejam $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults e α uma fórmula. Dizemos que α é uma consequência lógica de Δ, denotado por $W\vdash_D\alpha$, sse $E\vdash\alpha$ para alguma extensão E de Δ.

O teorema abaixo caracteriza extensões de um modo ligeiramente diferente do resultado original, já que ele toma $E_0=\mathrm{Th}(W)$ e não $E_0=W$, como proposto no Teorema 2.1 de Reiter [1980]. Porém o leitor pode facilmente verificar que as duas caracterizações são equivalentes.

Teorema 1:

Seja E um conjunto de sentenças e seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults. Definimos:

$$E_0=\mathrm{Th}(W)$$

e para $i\geq 0$:

$$E_{i+1}=\mathrm{Th}(E_i)\ \cup\ \{\omega|\ \frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_m}{\omega}\in D,\ \text{onde } \alpha\in E_i \text{ e } \neg\beta_1,\ldots,\neg\beta_m\notin E\}.$$

Então, E é uma extensão para Δ sse $E=\bigcup_{i=0}^{\infty}E_i$.

Dada uma teoria com defaults $\Delta=(D,W)$ com extensão E, o conjunto de *defaults geradores* para E com respeito a Δ é o conjunto:

$$\mathrm{GD}(E,\Delta)=\{\ \frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_m}{\omega}\in D\ |\ \alpha\in E \text{ e } \neg\beta_1,\ldots,\neg\beta_m\notin E\}.$$

Dado um conjunto de defaults D, definimos:

$$\mathrm{CONSEQUENTE}(D)=\{\omega\ |\ \frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_m}{\omega}\in D\}.$$

Teorema 2:

Suponha que E seja uma extensão de uma teoria com defaults $\Delta=(D,W)$. Então $E=\mathrm{Th}(W\cup\mathrm{CONSEQUENTE}(\mathrm{GD}(E,\Delta)))$.

Corolário 1:

(a) Uma teoria com defaults (D,W) tem uma extensão inconsistente sse W é inconsistente.

(b) Se uma teoria com defaults tem uma extensão inconsistente então esta é a sua única extensão.

Os dois teoremas abaixo estabelecem os resultados sobre teorias com defaults normais que necessitaremos na seção 4.

Teorema 3:

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults normais.

(a) Δ tem uma extensão.

(b) Se E e F são extensões distintas de Δ então $E\cup F$ é inconsistente (esta propriedade é chamada *ortogonalidade de extensões*).

Teorema 4:

Sejam $\Delta=(D,W)$ e $\Delta'=(D',W)$ teorias com defaults normais tais que $D'\subseteq D$.

(a) Seja E' uma extensão para $\Delta' = (D', W)$. Então Δ tem uma extensão E tal que $E' \subseteq E$ (esta propriedade é chamada *semi-monotonicidade*).

(b) Sejam E'_1 e E'_2 extensões distintas de Δ'. Então Δ tem extensões distintas E_1 e E_2 tais que $E'_1 \subseteq E_1$ e $E'_2 \subseteq E_2$.

O último resultado de Reiter [1980] que necessitaremos diz respeito à completude de provas com defaults.

Teorema 5: (Completude de Provas com Defaults)

Seja $\Delta = (D, W)$ uma teoria com defaults normais onde W é um conjunto consistente de sentenças. Δ tem uma extensão que contém a sentença β sse existe uma prova com defaults de β com respeito à Δ.

3. CAPTURANDO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Nesta seção analisamos, no contexto da lógica de defaults, alguns padrões de raciocínio matemático, formalizados por metateoremas da lógica de primeira ordem como em Enderton [1972].

3.1. Metateoremas Válidos para qualquer Teoria com Defaults

Inicialmente, apresentamos alguns metateoremas do cálculo dedutivo na lógica de primeira ordem que são diretamente herdados pela lógica de defaults. Eles seguem-se naturalmente porque uma teoria com defaults representa um conjunto de teorias de primeira ordem (suas extensões) onde, em cada uma, os metateoremas abaixo se aplicam.

Primeiro estabelecemos um resultado paralelo ao Teorema da Generalização, refletindo nossa intuição informal de que, se provamos $\alpha[x]$ sem qualquer suposição especial sobre x, onde x é uma variável em α, logo podemos dizer que "como x era arbitrário então temos $\forall x(\alpha)$".

Teorema 6: (Generalização para Lógica de Defaults)

Sejam $\Delta = (D, W)$ uma teoria com defaults e α uma fórmula da linguagem. Se $W \vdash_D \alpha$ então $W \vdash_D \forall x(\alpha)$.

Demonstração

Seja $\Delta = (D, W)$ uma teoria com defaults. Seja α uma fórmula da linguagem e suponha que $W \vdash_D \alpha$. Então, existe uma extensão E de Δ tal que $E \vdash \alpha$. Note que toda fórmula em E é uma sentença, i.e., não possui variáveis livres. Logo, pelo Teorema da Generalização, como x não ocorre livre em E, temos que $E \vdash \forall x(\alpha)$. Assim, $W \vdash_D \forall x(\alpha)$.

□

O teorema seguinte é semelhante ao Teorema da Generalização de Constantes. Informalmente, ele estabelece que, se conseguimos provar $\alpha[c]$, onde c é uma constante em α que não ocorre em nossa teoria, então podemos deduzir $\forall x(\alpha[c/x])$, onde $\alpha[c/x]$ é a expressão obtida a partir de α substituindo a constante c por uma nova variável x. Nós dizemos que um símbolo ocorre em uma teoria com defaults (D, W) se ele ocorre em alguma sentença em $W \cup \text{CONSEQUENTE}(D)$ e em D.

Teorema 7: (Generalização de Constantes para Lógica de Defaults)

Sejam $\Delta = (D, W)$ uma teoria com defaults e α uma fórmula da linguagem. Se $W \vdash_D \alpha[c]$, onde c é uma constante que não ocorre em Δ, então $W \vdash_D \forall x \alpha[c/x]$, onde x é uma variável que não ocorre em α.

Demonstração

Seja $\Delta = (D, W)$ uma teoria com defaults onde a constante c não ocorre. Seja α uma fórmula da linguagem e suponha que $W \vdash_D \alpha$. Assuma então que E é uma extensão para Δ tal que $E \vdash \alpha$. Pelo Teorema 2:

$E = \text{Th}(W \cup \text{CONSEQUENTE}(\text{GD}(E, \Delta)))$

Logo:

$W \cup \text{CONSEQUENTE}(\text{GD}(E, \Delta)) \vdash \alpha$

Como c não ocorre em $W \cup \text{CONSEQUENTE}(\text{GD}(E, \Delta))$, pelo Teorema da Generalização de Constantes para a lógica de primeira ordem:

$W \cup \text{CONSEQUENTE}(\text{GD}(E, \Delta))) \vdash \forall x(\alpha[c/x])$

onde x é uma variável que não ocorre em α.

Então, $E \vdash \forall x(\alpha[c/x])$. Assim, $W \vdash_D \forall x(\alpha[c/x])$.

□

O último teorema desta seção estabelece uma regra equivalente à Regra EI da lógica de primeira ordem.

Teorema 8: (Regra EI)

Seja $\Delta = (D,W)$ be a teoria com defaults. Sejam α e β duas fórmulas da linguagem. Se $W \cup \alpha[x/c] \vdash_D \beta$ então $W \cup \exists x(\alpha) \vdash_D \beta$, onde x é a única variável livre em α e c é uma constante que não ocorre em α, β e Δ.

Demonstração

O resultado se segue aplicando a Regra EI da lógica de primeira ordem.

□

3.2. Metateoremas Válidos para Classes Restritas de Teorias com Defaults

Nesta seção, apresentamos classes restritas de teorias com defaults nas quais metateoremas adicionais capturando raciocínio matemático são válidos.

Inicialmente, estabelecemos condições para teorias com defaults sob as quais uma regra equivalente a Modus Ponens é aplicável.

Teorema 9: (Modus Ponens para a Lógica de Defaults)

Seja $\Delta = (D,W)$ uma teoria com defaults. Sejam α e β duas fórmulas da linguagem. Se Δ tem uma única extensão então $W \vdash_D \alpha \Rightarrow \beta$ e $W \vdash_D \alpha$ implicam em $W \vdash_D \beta$.

Demonstração

Seja $\Delta = (D,W)$ uma teoria com defaults e sejam α e β duas fórmulas da linguagem. Suponha que E seja a única extensão de Δ. Se $W \vdash_D \alpha \Rightarrow \beta$ e $W \vdash_D \alpha$ então $E \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ e $E \vdash \alpha$. Logo, por Modus Ponens, $E \vdash \beta$. Assim, $W \vdash_D \beta$.

□

Teorema 10:

Seja $\Delta = (D,W)$ uma teoria com defaults normais. Δ tem extensão única sse, para quaisquer fórmulas α e β da linguagem, se $W \vdash_D \alpha \Rightarrow \beta$ e $W \vdash_D \alpha$ então $W \vdash_D \beta$.

Demonstração

Seja $\Delta = (D,W)$ uma teoria com defaults normais e sejam α e β duas fórmulas da linguagem. Se Δ tem extensão única então, pelo Teorema 9, $W \vdash_D \alpha \Rightarrow \beta$ e $W \vdash_D \alpha$ implicam em $W \vdash_D \beta$.

Suponha agora que E_1 e E_2 sejam duas extensões de Δ. Claramente, pelo Corolário 1, W é consistente. Pelo Teorema 3(b), $E_1 \cup E_2$ é inconsistente. Então existe um conjunto inconsistente $\{A_1,...,A_n\} \cup \{B_1,...,B_m\}$ tal que $A_i \in E_1$ para todo $i \in [1,n]$ e $B_i \in E_2$ para todo $i \in [1,m]$. Logo, $\{A_1,...,A_n\} \vdash \neg(B_1 \wedge ... \wedge B_m)$. Então, $E_1 \vdash \neg(B_1 \wedge ... \wedge B_m)$. Seja $\alpha = (B_1 \wedge ... \wedge B_m)$ e seja β qualquer sentença sempre falsa. Assim, $E_1 \vdash \neg\alpha \vee \beta$ implica em $W \vdash_D \alpha \Rightarrow \beta$ e $E_2 \vdash \alpha$ implica em $W \vdash_D \alpha$. Porém, como W é consistente, $W \vdash_D \beta$ não é válido. Contradição.

□

Apresentamos abaixo uma classe de teorias com defaults onde um semelhante ao Teorema da Contraposição em lógica de primeira ordem é válido em lógica de defaults. Informalmente, o Teorema da Contraposição estabelece que, se conseguirmos provar $\neg\beta$ assumindo α, então podemos provar $\neg\alpha$ assumindo β.

Teorema 11:

Seja $\Delta = (D,W)$ uma teoria com defaults. Assuma que Δ tem uma extensão E tal que $E \neq \mathrm{Th}(W)$. Então existem sentenças α e β tais que $W \cup \{\alpha\} \vdash_D \neg\beta$, mas não $W \cup \{\beta\} \vdash_D \neg\alpha$.

Demonstração

Seja $\Delta = (D,W)$ uma teoria com defaults. Seja E uma extensão de Δ tal que $E \neq \mathrm{Th}(W)$. Claramente, pelo Corolário 1, W e E são consistentes. Considere as sentenças α e β tal que $\neg\beta \in (E - \mathrm{Th}(W))$ e α seja uma tautologia. Então $W \vdash_D \neg\beta$. Logo, $W \cup \{\alpha\} \vdash_D \neg\beta$. Suponha que um similar ao Teorema da Contraposição seja válido para lógica de defaults. Então, $W \cup \{\beta\} \vdash_D \neg\alpha$, i.e., $W \cup \{\beta\} \vdash_D$FALSO. Pelo Corolário 1, $W \cup \{\beta\}$ é inconsistente. Assim, $W \vdash \neg\beta$. Contradição.

□

Pelo teorema anterior observamos que o Teorema da Contraposição não é válido em teorias com defaults (D,W) que possuam ao menos uma extensão diferente de $\mathrm{Th}(W)$. Note que, pela Minimalidade de Extensões (Reiter[1980]), segue-se que se uma teoria com defaults (D,W) tem uma extensão $\mathrm{Th}(W)$ então esta é sua única extensão.

Infelizmente, concluímos que o Teorema da Contraposição só será válido em teorias com defaults com restrições muito severas, ou seja, teorias com extensão única igual a $\mathrm{Th}(W)$, sendo os defaults inúteis.

O próximo teorema estabelece um equivalente ao Teorema da Redução ao Absurdo para lógica de defaults.

Teorema 12: (Redução ao Absurdo para a Lógica de Defaults)

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults com ao menos uma extensão. Seja α uma fórmula da linguagem. Se $W \cup \{\alpha\}$ é inconsistente então $W \vdash_D \neg\alpha$.

Demonstração

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults com ao menos uma extensão E. Seja α uma fórmula tal que $W \cup \alpha$ seja inconsistente. Logo, pelo Teorema da Redução ao Absurdo, $W \vdash \neg\alpha$. Pelo Teorema 2:

$E = \mathrm{Th}(W \cup \mathrm{CONSEQUENTE}(\mathrm{GD}(E,\Delta)))$

Como $W \vdash \neg\alpha$, temos:

$W \cup \mathrm{CONSEQUENTE}(\mathrm{GD}(E,\Delta)) \vdash \neg\alpha$

Então, $E \vdash \neg\alpha$. Assim, por definição, $W \vdash_D \neg\alpha$.

□

Por fim, vamos apresentar um paralelo do Teorema da Dedução. Intuitivamente, o teorema abaixo diz que, se a partir de uma teoria com defaults $\Delta=(D,W)$ e assumindo α, concluímos β, então podemos legitimamente concluir que $\alpha\Rightarrow\beta$ é uma consequência de Δ.

Teorema 13: (Um Teorema da Dedução para Lógica de Defaults)

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults normais tal que cada default em D não possua pre-requisito. Sejam α e β duas sentenças da linguagem. Se $W \cup \{\alpha\} \vdash_D \beta$ então $W \vdash_D \alpha\Rightarrow\beta$.

Demonstração

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults normais onde cada default em D não possui pre-requisito e sejam α e β duas sentenças da linguagem. Suponha que $W \cup \{\alpha\}$ seja inconsistente. Logo, $W \vdash \neg\alpha$ implica em $\neg\alpha \in E'$, para qualquer extensão E' de (D,W). Assim, $\alpha\Rightarrow\beta\in E'$ para qualquer β. Então $W \vdash_D \alpha\Rightarrow\beta$.

Suponha agora que $W \cup \{\alpha\}$ seja consistente e $\beta\in E$, onde E é uma extensão de $(D, W \cup \{\alpha\})$. Pelo Teorema 5, existe uma prova com defaults de β com respeito a $(D, W \cup \{\alpha\})$. Como os defaults em D não têm pre-requisitos, para $D_0 \subseteq D$, a prova com defaults é:

$W \cup \{\alpha\} \cup \mathrm{CONSEQUENTE}(D_0) \vdash \beta$

e

$W \cup \{\alpha\} \cup \mathrm{CONSEQUENTE}(D_0)$ é satisfatível.

Logo,

$W \cup \mathrm{CONSEQUENTE}(D_0) \vdash \alpha\Rightarrow\beta$

e

$W \cup \mathrm{CONSEQUENTE}(D_0)$ é satisfatível.

Assim, $\alpha\Rightarrow\beta$ possui uma prova com defaults com respeito a (D,W). Então, pelo Teorema 5, (D,W) tem uma extensão E' tal que $\alpha\Rightarrow\beta\in E'$. Logo, $W \vdash_D \alpha\Rightarrow\beta$.

□

Note que o Teorema 13 diz respeito apenas a teorias com defaults normais cujos defaults não possuem pre-requisitos. Nós veremos na seção 4 que existem outras classes de teorias com defaults para as quais um equivalente ao Teorema da Dedução também é válido. O exemplo seguinte ilustra que este teorema não é válido para teorias com defaults arbitrárias.

Exemplo 1:

Seja $D=\{:\neg\alpha/\alpha\}$ e $W=\emptyset$. A teoria com defaults $(D, W \cup \{\alpha\})$ tem uma extensão $E=\mathrm{Th}(\{\alpha\})$, porém a teoria com defaults (D,W) não possui extensões.

4. CAPTURANDO RACIOCÍNIO HIPOTÉTICO

4.1. Reinterpretando Defaults

Se desejamos reter raciocínio hipotético é razoável nos concentrarmos em defaults que sejam normais e que não possuam pre-requisitos, tendo em vista o Teorema 13. Apesar destas restricões parecerem severas, argumentamos nesta seção que tais defaults são ainda suficientes para capturar o mesmo tipo de informação usualmente associada a defaults normais.

Para tornar a discussão mais precisa, vamos interpretar os defaults como sugerido em (Bidoit [1989]). Denote por $\forall\gamma$ o fecho universal de uma fórmula γ. Considere uma sentença da forma $\forall(\alpha \Rightarrow \neg\beta_1 \vee ... \vee \neg\beta_n \vee \mu)$ e suponha que queiramos dar preferência ao disjunto μ sobre os demais disjuntos $\neg\beta_i$. A informação contida na sentença e a escolha do disjunto preferido correspondem então, intuitivamente, ao default $(\alpha:\beta_1,...,\beta_n/\mu)$.

Por exemplo, considere a sentença:

$\forall x(\text{adulto}(x) \Rightarrow$
$\neg(\text{empregado}(x) \wedge \neg\text{universitario}(x)) \vee \text{empregado}(x))$

Suponha que queiramos dar preferência ao disjunto empregado(x). Então podemos expressar esta informação através do default:

$$\frac{\text{adulto}(x) : (\text{empregado}(x) \wedge \neg\text{universitario}(x))}{\text{empregado}(x)}$$

Podemos então definir uma transformação σ como se segue (o disjunto preferido é fixado como sendo sempre o último):

$$\sigma(\ \forall(\alpha \rightarrow \neg\beta_1 \vee ... \vee \neg\beta_n \vee \mu)\ ) = \frac{\alpha : \beta_1,\ ...,\ \beta_n}{\mu}$$

Embora a definição de σ sugira uma interpretação intuitiva satisfatória para defaults em geral, ela requer maiores explicações quando aplicada a defaults normais ou semi-normais (Etherington [1987]). De fato, tais defaults resultam de sentenças que são tautologias e, assim sendo, eles carregam apenas as informações sobre as preferências, em certo sentido. Por exemplo, considere as sentenças

$\forall x(\text{passaro}(x) \Rightarrow \neg\text{voa}(x) \vee \text{voa}(x))$
$\forall x(\text{elefante}(x) \Rightarrow \text{voa}(x) \vee \neg\text{voa}(x))$

Ambas são tautologias e, portanto, de um ponto de vista estritamente lógico, capturam a mesma informação. Porém, quando damos preferência a um dos disjuntos da conclusão e mapeamos estas sentenças em defaults, os resultados são bem diferentes. Realmente, nós preferimos acreditar que pássaros vôam, mas elefantes não (embora existam pinguins e o Dumbo). Os defaults correspondentes são:

$$\frac{\text{passaro}(x) : \text{voa}(x)}{\text{voa}(x)}$$
$$\frac{\text{elefante}(x) : \neg\text{voa}(x)}{\neg\text{voa}(x)}$$

Infelizmente, a transformação σ, quando aplicada a uma sentença da forma $\forall(\alpha \Rightarrow \neg\mu \vee \mu)$, produz um default normal que não é da classe apropriada, porque o default terá α como pre-requisito. Assim, devemos pesquisar em uma direção um pouco diferente.

Observe que a sentença
$\forall(\alpha \Rightarrow \neg\beta_1 \vee ... \vee \neg\beta_n \vee \mu)$
é tautologicalmente equivalente a
$\forall(\neg(\alpha \Rightarrow \beta_1) \vee ... \vee \neg(\alpha \Rightarrow \beta_n) \vee (\alpha \Rightarrow \mu))$.

Agora, aplicando σ a esta segunda sentença, obtemos:

$$\sigma(\ \forall(\neg(\alpha \Rightarrow \beta_1) \vee ... \vee \neg(\alpha \Rightarrow \beta_n) \vee (\alpha \Rightarrow \mu))\ ) = \frac{: \alpha \Rightarrow \beta_1,\ ...,\ \alpha \Rightarrow \beta_n}{\alpha \Rightarrow \mu}$$

Isto sugere uma transformação entre conjuntos de defaults definida como:

$$\tau_1(D) = \{ \frac{:\alpha \Rightarrow \beta_1, ..., \alpha \Rightarrow \beta_m}{\alpha \Rightarrow \omega} \mid \frac{\alpha:\beta_1, ..., \beta_m}{\omega} \in D \},$$

para cada conjunto de defaults D

Note que τ_1 mapeia um conjunto de defaults normais em um conjunto de defaults normais sem pre-requisito, que são da classe apropriada segundo o Teorema 13. Além disto, como os defaults iniciais e finais vêm de sentenças de primeira ordem que são tautologicamente equivalentes, podemos concluir que eles capturam a mesma informação, mas diferem na preferência dada: o default inicial dá preferência a μ, enquanto o final dá a $\alpha \Rightarrow \mu$.

Aplicando o mesmo raciocínio a outras sentenças que são equivalentes a $\forall(\alpha \Rightarrow \neg\beta_1 \vee ... \vee \neg\beta_n \vee \mu)$, obtemos ainda outras transformações entre defaults que preservam o conteúdo da informação, a serem exploradas em detalhe na próxima seção.

4.2. Transformações entre Teorias com Defaults

Esta seção prova algumas propriedades básicas de certos mapeamentos entre conjuntos de defaults, incluindo τ_1. Como um corolário, estendemos o resultado estabelecido pelo Teorema 13 a outras classes de teorias com defaults.

Definição 1:

Seja L a linguagem de primeira ordem em questão. Para qualquer conjunto D de defaults com a forma $(\alpha:\beta_1,...,\beta_m/\omega)$, onde $\alpha,\beta_1,...,\beta_m$ são sentenças, definimos:

(a) $\tau_1(D) =$
$$\{ \frac{: \alpha \Rightarrow \beta_1, ..., \alpha \Rightarrow \beta_m}{\alpha \Rightarrow \omega} \mid \frac{\alpha : \beta_1, ..., \beta_m}{\omega} \in D \};$$

(b) $\tau_2(D) = D \cup$

$$\{ \frac{:\alpha\Rightarrow\beta_1, ..., \alpha\Rightarrow\beta_m}{\alpha\Rightarrow\omega} \mid \frac{\alpha : \beta_1, ..., \beta_m}{\omega} \in D \};$$

(c) $\tau_3(D) =$

$$\{ \frac{\alpha\vee\gamma : \alpha\Rightarrow\beta_1, ..., \alpha\Rightarrow\beta_m}{\omega\vee\gamma} \mid \frac{\alpha : \beta_1, ..., \beta_m}{\omega} \in D$$

e γ é uma sentença em $L\}$.

Observe que $\tau_1(D)\subseteq\tau_3(D)$, se nós tomarmos γ como $\neg\alpha$, e $\tau_1(D)\subseteq\tau_2(D)$, para qualquer D. Além disto, se D é um conjunto de defaults normais, $\tau_1(D)$ e $\tau_2(D)$ são também conjuntos de defaults normais.

O próximo teorema mostra que as teorias com defaults $(\tau_1(D),W)$, $(\tau_2(D),W)$ e $(\tau_3(D),W)$ têm as mesmas extensões.

Teorema 14:

Seja $\Delta = (D,W)$ uma teoria com defaults. Seja E um conjunto de sentenças. Então:

E é uma extensão de $(\tau_1(D),W)$

sse

E é uma extensão de $(\tau_2(D),W)$

sse

E é uma extensão de $(\tau_3(D),W)$.

Demonstração

Seja $\Delta = (D,W)$ uma teoria com defaults. Sejam $\Delta_1 = (D_1,W)$, $\Delta_2 = (D_2,W)$ e $\Delta_3 = (D_3,W)$ teorias com defaults onde $D_1 = \tau_1(D)$, $D_2 = \tau_2(D)$ e $D_3 = \tau_3(D)$.

Nós dividimos a prova em duas partes:

1) E é uma extensão para Δ_1 sse E é uma extensão para Δ_3;

2) E é uma extensão para Δ_1 sse E é uma extensão for Δ_2.

Assim, E é uma extensão para Δ_1 sse E é uma extensão para Δ_2 sse E é uma extensão para Δ_3, completando a prova.

Parte 1: Seja E um conjunto de sentenças tal que $E = \mathrm{Th}(E)$. Construímos F_i como:

$F_0 = \mathrm{Th}(W)$

e para $i \geq 0$:

$F_{i+1} = \mathrm{Th}(F_i) \cup$

$$\{\omega\vee\gamma \mid \frac{\alpha\vee\gamma : \alpha\Rightarrow\beta_1, ..., \alpha\Rightarrow\beta_m}{\omega\vee\gamma} \in D_3$$

e $\alpha\vee\gamma\in F_i$ e $\neg(\alpha\Rightarrow\beta_1),..., \neg(\alpha\Rightarrow\beta_m)\notin E\}$.

Construímos G_i como:

$G_0 = \mathrm{Th}(W)$

e para $i \geq 0$:

$G_{i+1} = \mathrm{Th}(G_i) \cup$

$$\{\alpha\Rightarrow\omega \mid \frac{:\alpha\Rightarrow\beta_1, ..., \alpha\Rightarrow\beta_m}{\alpha\Rightarrow\omega} \in D_1$$

e $\neg(\alpha\Rightarrow\beta_1),..., \neg(\alpha\Rightarrow\beta_m)\notin E\}$.

Vamos provar indutivamente que $\mathrm{Th}(F_i) = \mathrm{Th}(G_i)$, para todo $i \geq 0$.

Para $i = 0$, trivialmente temos $\mathrm{Th}(F_0) = \mathrm{Th}(G_0)$.

Assuma que $\mathrm{Th}(F_i) = \mathrm{Th}(G_i)$, para $i > 0$. Provaremos que $\mathrm{Th}(F_{i+1}) = \mathrm{Th}(G_{i+1})$.

Primeiro provamos que $\mathrm{Th}(G_{i+1})\supseteq F_{i+1}$, o que implica em $\mathrm{Th}(G_{i+1})\supseteq\mathrm{Th}(F_{i+1})$. Seja $\mu\in F_{i+1}$. Suponha que $\mu\in\mathrm{Th}(F_i)$. Recorde que $\mathrm{Th}(F_i) = \mathrm{Th}(G_i)$, pela hipótese de indução, e que $\mathrm{Th}(G_i)\subseteq G_{i+1}$, por definição. Então, temos $\mu\in G_{i+1}$ e, assim, $\mu\in\mathrm{Th}(G_{i+1})$. Suponha agora que $\mu\notin\mathrm{Th}(F_i)$. Logo, existe um default $(\alpha\vee\gamma:\alpha\Rightarrow\beta_1,...,\alpha\Rightarrow\beta_m/\omega\vee\gamma)\in D_3$ tal que $\alpha\vee\gamma\in F_i$ e $\neg(\alpha\Rightarrow\beta_1),..., \neg(\alpha\Rightarrow\beta_m)\notin E$ e μ é igual a $\omega\vee\gamma$. Além disso, pela Definição 1, existe também um default $(:\alpha\Rightarrow\beta_1,...,\alpha\Rightarrow\beta_m/\alpha\Rightarrow\omega)\in D_1$. Então, como $\neg(\alpha\Rightarrow\beta_1),..., \neg(\alpha\Rightarrow\beta_m)\notin E$, por este default, $\alpha\Rightarrow\omega\in G_{i+1}$. Mas, como $\alpha\vee\gamma\in F_i$, temos $\alpha\vee\gamma\in\mathrm{Th}(F_i)$. Recorde novamente que $\mathrm{Th}(F_i) = \mathrm{Th}(G_i)$, pela hipótese de indução, e $\mathrm{Th}(G_i)\subseteq G_{i+1}$, por definição. Assim, obtemos $\alpha\vee\gamma\in G_{i+1}$. Mas $\alpha\vee\gamma$, $\alpha\Rightarrow\omega \in G_{i+1}$ implica em $\omega\vee\gamma\in\mathrm{Th}(G_{i+1})$, ou seja, $\mu\in\mathrm{Th}(G_{i+1})$. Logo, podemos concluir que $\mathrm{Th}(G_{i+1})\supseteq F_{i+1}$. Assim $\mathrm{Th}(G_{i+1})\supseteq\mathrm{Th}(F_{i+1})$.

Vamos provar agora que $G_{i+1}\subseteq\mathrm{Th}(F_{i+1})$, o que implica em $\mathrm{Th}(G_{i+1})\subseteq\mathrm{Th}(F_{i+1})$. Seja $\mu\in G_{i+1}$. Suponha que $\mu\in\mathrm{Th}(G_i)$. Recorde que $\mathrm{Th}(F_i) = \mathrm{Th}(G_i)$, pela hipótese de indução, e que $\mathrm{Th}(F_i)\subseteq F_{i+1}$, por definição. Logo, temos $\mu\in F_{i+1}$ e, assim, $\mu\in\mathrm{Th}(F_{i+1})$. Suponha agora que $\mu\notin\mathrm{Th}(G_i)$. Então existe um default $(:\alpha\Rightarrow\beta_1,...,\alpha\Rightarrow\beta_m/\alpha\Rightarrow\omega)\in D_1$ tal que

$\neg(\alpha\Rightarrow\beta_1),\ldots,\neg(\alpha\Rightarrow\beta_m)\notin E$ e μ é igual a $\alpha\Rightarrow\omega$. Além disso, pela Definição 1, existe também um default $(\alpha\vee\neg\alpha:\alpha\Rightarrow\beta_1,\ldots,\alpha\Rightarrow\beta_m/\omega\vee\neg\alpha)\in D_3$. Mas, pela definição de F_i, $\alpha\vee\neg\alpha\in F_i$. Agora, como $\neg\alpha\vee\alpha\in F_i$ e $\neg(\alpha\Rightarrow\beta_1),\ldots,\neg(\alpha\Rightarrow\beta_m)\notin E$, por este default obtemos $\omega\vee\neg\alpha\in F_{i+1}$, o que implica em $\alpha\Rightarrow\omega\in Th(F_{i+1})$. Logo, $G_{i+1}\subseteq Th(F_{i+1})$ e então $Th(G_{i+1})\subseteq Th(F_{i+1})$.

Assim, podemos concluir que $F_i\subseteq Th(F_i)=Th(G_i)\subseteq G_{i+1}$, o que implica em $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$. Por simetria, nós também temos $\bigcup_{i=0}^{\infty} G_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$.

Obtemos então que $E=\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ sse $E=\bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$. Logo, E é uma extensão de Δ_1 sse E é uma extensão de Δ_3.

Parte 2: Segue-se analogamente à parte 1.

□

Baseado no Teorema 14, podemos falar indistintamente sobre uma extensão E de $(\tau_1(D),W)$ ou de $(\tau_2(D),W)$ ou de $(\tau_3(D),W)$ já que todas estas teorias com defaults têm as mesmas extensões. Porém, o teorema não pode ser aplicado a qualquer mapeamento obtido segundo a estratégia apresentada na seção 4.1.

Exemplo 2:

Note que a sentença $\forall(\alpha\Rightarrow\neg\beta_1\vee\ldots\vee\neg\beta_m\vee\mu)$ é equivalente a $\forall((\alpha\Rightarrow\neg\beta_1)\vee\ldots\vee(\alpha\Rightarrow\neg\beta_m)\vee(\alpha\Rightarrow\mu))$.
Logo, aplicando a transformação σ à última sentença, podemos definir τ_4 como:

$$\tau_4(D)=\left\{\frac{:\alpha\wedge\beta_1,\ldots,\alpha\wedge\beta_m}{\alpha\Rightarrow\omega} \;\middle|\; \frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_m}{\omega}\in D\right\}.$$

Seja $\Delta=(D,W)$, onde:

$$D=\left\{\frac{\alpha:\beta}{\beta},\ \frac{:\neg\beta}{\neg\beta}\right\} \qquad W=\emptyset$$

Então,

$$\tau_1(D)=\left\{\frac{:\alpha\Rightarrow\beta}{\alpha\Rightarrow\beta},\ \frac{:\neg\beta}{\neg\beta}e\right\}$$

$$\tau_4(D)=\left\{\frac{:\alpha\wedge\beta}{\alpha\Rightarrow\beta},\ \frac{:\neg\beta}{\neg\beta}\right\}$$

A teoria com defaults $(\tau_1(D),W)$ possui apenas a extensão $E'=Th(\{\neg\beta\})$ e a teoria com defaults possui apenas a extensão $E''=Th(\{\neg\beta,\neg\alpha\})$. Claramente $E'\neq E''$.

4.3. Propriedades dos Mapeamentos para Teorias com Defaults Normais

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults normais e seja $\Delta_i=(\tau_i(D),W)$, para cada $i\in[1,3]$. Nós estabelecemos nesta seção uma série de propriedades de Δ_i.

Primeiro note que, pela Definição 1, Δ_1 e Δ_2 são também teorias com defaults normais. Logo, os resultados estabelecidos pelos Teoremas 3, 4 e 5 da seção 2 são válidos para Δ_1 e Δ_2. Além disso, pelo Teorema 14, estes resultados são também válidos para Δ_3. Mas, mais importante, é possível trabalhar com raciocínio hipotético em Δ_1, Δ_2 e Δ_3.

Corolário 2:

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults normais e seja $\Delta_i=(\tau_i(D),W)$, para cada $i\in[1,3]$. Sejam α e β duas sentenças da linguagem. Se E é uma extensão para $(\tau_i(D),W\cup\{\alpha\})$ e $\beta\in E$ então existe uma extensão E' para Δ_i tal que $\alpha\Rightarrow\beta\in E'$.

Demonstração

Pelo Teorema 13, o resultado é válido para Δ_1. Então, pelo Teorema 14, o resultado pode ser estendido para Δ_2 e Δ_3.

□

O resto desta seção compara as extensões de Δ com as de Δ_i.

Teorema 15:

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults normais e seja $\Delta_i=(\tau_i(D),W)$, para cada $i\in[1,3]$. Então, para cada extensão E de Δ existe uma extensão E' de Δ_i tal que $E\subseteq E'$.

Demonstração

Seja $D'=\tau_2(D)$. Pela Definição 1, D' é um conjunto de defaults normais e $D\subseteq D'$. Pelo Teorema 4(a), se E é uma extensão de (D,W), existe uma extensão E' de (D',W) tal que $E\subseteq E'$. Pelo Teorema 14, o resultado então é estendido para Δ_1 e Δ_3.

$\square$

Teorema 16:

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults normais e seja $\Delta_i=(\tau_i(D),W)$, para cada $i\in[1,3]$. Então, para cada extensão E' de Δ_i, existe no máximo uma extensão E de Δ tal que $E\subseteq E'$.

Demonstração

Se W é inconsistente então, pelo Corolário 1, Δ e Δ_1 possuem apenas uma extensão inconsistente e o resultado segue trivialmente. Assim, suponha que W seja consistente. Sejam E e F duas extensões distintas de Δ. Pela ortogonalidade de extensões em teorias com defaults normais, $E \cup F$ é inconsistente. Suponha que E' seja uma extensão de Δ_1 contendo E e F. Então E' é inconsistente, o que não é possível, pois W ser consistente implica em E' ser consistente, pelo Corolário 1 da seção 2. Assim, para cada extensão E' de Δ_i, existe no máximo uma extensão E de Δ tal que $E\subseteq E'$. Pelo Teorema 14, este resultado também é válido para Δ_2 e Δ_3.

$\square$

Tendo em vista o Teorema 16, podemos definir a seguinte família de funções:

Definição 2:

Seja $\Delta=(D,W)$ uma teoria com defaults normais e seja $\Delta_i=(\tau_i(D),W)$, para $i\in[1,3]$. Seja ξ o conjunto de extensões de Δ e ξ' o conjunto de extensões de Δ_i. Definimos a função $\mathscr{R}[\Delta]$: $\xi'\rightarrow\xi$ como sendo:

$$\mathscr{R}[\Delta](E')=E \quad \text{sse} \quad E\subseteq E'$$

Esta definição é de fato correta pois, pelo Teorema 14, Δ_1, Δ_2 e Δ_3 têm o mesmo conjunto de extensões. Além disso, pelo Teorema 16, dada uma teoria com defaults normais Δ, $\mathscr{R}[\Delta]$ é realmente uma função. Vamos agora investigar se $\mathscr{R}[\Delta]$ é sobrejetiva, injetiva ou total. Uma resposta positiva à primeira questão segue diretamente do Teorema 15. Porém, as duas últimas questões têm resposta negativa. De fato, a função $\mathscr{R}[\Delta]$ não é necessariamente injetiva, i.e., dada uma extensão E de Δ, pode existir mais de uma extensão E' de Δ_i tal que $E\subseteq E'$.

Exemplo 3:

Seja $\Delta=(D,W)$, onde
$D=\{\frac{\alpha:\beta}{\beta}, \frac{\alpha\Rightarrow\beta:\gamma}{\gamma}, \frac{\alpha\Rightarrow\beta:\neg\gamma}{\neg\gamma}\}$
e $W=\emptyset$.

Então, Δ tem apenas uma extensão $E=\mathrm{Th}(\emptyset)$. Considere agora $\Delta_1=(\tau_1(D),W)$, onde:

$\tau_1(D)=$
$\{\frac{:\alpha\Rightarrow\beta}{\alpha\Rightarrow\beta}, \frac{:(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow\gamma}{(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow\gamma}, \frac{:(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow\neg\gamma}{(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow\neg\gamma}\}$.

Então, Δ_1 tem três extensões:

$E'_1=\mathrm{Th}(\{\alpha\Rightarrow\beta,\gamma\})$

$E'_2=\mathrm{Th}(\{\alpha\Rightarrow\beta,\neg\gamma\})$

$E'_3=\mathrm{Th}(\{\neg(\alpha\Rightarrow\beta)\})$

tais que $E\subseteq E'_1$, $E\subseteq E'_2$ e $E\subseteq E'_3$.

Finalmente, a função $\mathscr{R}[\Delta]$ não é necessariamente total, i.e., pode existir uma extensão E' de Δ_i e nenhuma extensão E de Δ tal que $E\subseteq E'$.

Exemplo 4:

Seja $\Delta=(D,W)$, onde
$D=\{\frac{\alpha:\beta}{\beta}, \frac{:\neg(\alpha\Rightarrow\beta)}{\neg(\alpha\Rightarrow\beta)}\}$
e $W=\emptyset$.

Então, Δ tem apenas uma extensão $E=\mathrm{Th}(\{\neg(\alpha\Rightarrow\beta)\})$.
Considere agora $\Delta_1=(\tau_1(D),W)$, onde
$\tau_1(D)=\{\frac{:\alpha\Rightarrow\beta}{\alpha\Rightarrow\beta}, \frac{:\neg(\alpha\Rightarrow\beta)}{\neg(\alpha\Rightarrow\beta)}\}$.

Então, Δ_1 tem duas extensões, $E'_1=\mathrm{Th}(\{\alpha\Rightarrow\beta\})$ e $E'_2=\mathrm{Th}(\{\neg(\alpha\Rightarrow\beta)\})$, mas $E\nsubseteq E'_1$.

5. CONCLUSÕES

Investigamos neste trabalho o uso de raciocínio matemático em lógica de defaults. Primeiro, estabelecemos alguns metateoremas que são diretamente herdados dos metateoremas do cálculo dedutivo de primeira ordem. Em seguida, apresentamos classes restritas de teorias com defaults em que valem certos outros metateoremas. Por fim, discutimos em detalhe algumas outras classes de teorias para as quais vale o Teorema da Dedução. Para tal, definimos três mapeamentos do conjunto de defaults de uma teoria com defaults em outro conjunto de defaults gerando três novas teorias com defaults cujas extensões são equivalentes. No caso de teorias com defaults normais, as novas teorias com defaults têm propriedades interessantes como semi-monotonicidade, ortogonalidade de extensões, número não decrescente de extensões na adição de novos defaults normais ao conjunto original de defaults. Finalmente, discutimos a relação entre as extensões da teoria com defaults original e as extensões das teorias geradas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bidoit, N. and R. Hull [1989]. "Minimalism, Justification and Non-monotonicity in Deductive Databases", *Journal of Computer and System Sciences* **38:2**, 290-324.
2. Enderton, H.E. [1972]. *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press.
3. Etherington, D.E [1987]. "Formalizing Nonmonotonic Reasoning Systems", *Artificial Intelligence* **41**, 41-85.
4. Reiter, R. [1978]. "On Closed World Databases", em *Logic and Databases*, H. Gallaire e J. Minker (eds.), Plenum Press.
5. Reiter, R. [1980]. "A logic for default reasoning", *Artificial Intelligence* **13**, 81-132.
6. Reiter, R. [1987]. "Nonmonotonic Reasoning", em *Exploring Artificial Intelligence: Survey Talks from National Conference on Artificial Intelligence*, Morgan Kaufmann Publishers.