PUC-Rio
Prof. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
21 de setembro de 2009

Departamento de Informática
Período: 2009.2
Horário: 4as. 10-13 - Sala 512 RDC

OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA (INF 2912)

Lista Formal 1

1. Seja o problema de Transportes

   Problema 1 *: Dados um conjunto de centros de produção A, $|A| = m$, e um conjunto de centros de consumo B, $|B| = n$, os custos* **unitários** c_{ij} *de deslocamento dos centros de produção para os centros de consumo, e a produção e o consumo dos centros, respectivamente, $\{a_1, \ldots, a_m\}$ e $\{b_1, \ldots, b_n\}$, onde a quantidade total produzida é igual à quantidade total consumida, determinar com que quantidade cada centro de produção supre cada centro de consumo de modo que* **o custo total de transporte seja mínimo**.

   Seja a formulação, como programa linear, Primal abaixo para este problema, onde x_{ij} representa a quantidade que é enviada do centro de produção i para o centro de consumo j, para todo par i, j:

$$
\begin{aligned}
(P) : \text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} && (1)\\
\text{S.t.} \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ldots, m && (2)\\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n && (3)\\
& x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n && (4)
\end{aligned}
$$

   (a) Argumente por que a resolução deste programa linear resolve o problema de Transportes.

   (b) Escreva o problema de programação linear Dual ao problema acima.

   (c) Partindo da formulação Primal aplique o método Primal-Dual para propor um algoritmo combinatório para o problema de Transportes.

   Observação: Pequenas modificações na formulação original podem tornar mais fácil a construção do algoritmo.

   (d) Exemplifique o seu algoritmo $m = 2,\ n = 3,\ a_1 = 15,\ a_2 = 25,\ b_1 = 15,\ b_2 = 15,\ b_3 = 10,$ $c_{11} = 5,\ c_{12} = 10,\ c_{13} = 7,\ c_{21} = 8,\ c_{22} = 9,\ c_{23} = 6.$

   (e) Repita os 2 itens anteriores assumindo que o problema inicial é o Dual.

   Comente cada passo do desenvolvimento dos algoritmos acima.

2. Seja o problema de Alocação Linear (*Assignment Problem*).

   Problema 2 *: Dados um conjunto de tarefas T, $|T| = n$, e um conjunto de máquinas M, $|M| = n$ e os custos c_{ij} de alocar a tarefa i à máquina j, determinar uma alocação das n tarefas às n máquinas cujo* **custo total seja mínimo**.

   Seja a formulação, como programa linear, Primal abaixo para este problema, onde x_{ij} assume valor 1 quando a tarefa i é alocada à máquina j:

$$(P) : \text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{5}$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

   (a) Argumente por que a resolução deste programa linear resolve o problema de Alocação Linear.

   (b) Escreva o problema de programação linear Dual ao problema acima.

   (c) Partindo da formulação Primal aplique o método Primal-Dual para propor um algoritmo combinatório para o problema de Alocação Linear.

   (d) Exemplifique o seu algoritmo $n = 3$, $c_{11} = 5$, $c_{12} = 10$, $c_{13} = 7$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 9$, $c_{23} = 6$, $c_{31} = 3$, $c_{32} = 13$, $c_{33} = 2$.

   (e) Repita os 2 itens anteriores assumindo que o problema inicial é o Dual.

   Comente cada passo do desenvolvimento dos algoritmos acima.

3. Seja o problema de encontrar o *branching* máximo de um grafo orientado onde os arcos têm pesos não-negativos.

   Problema 3 *: Seja um grafo orientado $G = (V, A)$ com pesos não-negativos w_a associados aos arcos $a \in A$. Um* branching *B é um conjunto de arcos ($B \subseteq A$) onde o grafo $G_B = (V, B)$ possui todos os vértices com grau de entrada no máximo 1, i.e. $|\delta^-_B(v)| \le 1$, $\forall v \in V$. Um* branching *B induz, necessariamente, um grafo $G_{\overline{B}} = (V, \overline{B})$, obtido retirando-se as orientações dos arcos em B para obter $\overline{B}$,* **acíclico**. *Deseja-se determinar um conjunto B para o qual a soma dos pesos dos arcos em B é máxima, i.e. maximiza $\sum_{a \in B} w_a$.*

   Seja a formulação, como programa linear, Primal abaixo para este problema, onde x_a assume valor 1 quando o arco a está em B, ou seja $a \in B$:

$$(P) : \text{Maximize} \quad \sum_{a \in A} w_a x_a \tag{9}$$

$$\text{S.t.}$$

$$\sum_{a \in \delta^-(v)} x_a \le 1 \qquad \forall v \in V \tag{10}$$

$$\sum_{a \in \sigma(S)} x_a \le |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V \tag{11}$$

$$x_a \ge 0 \qquad a \in A \tag{12}$$

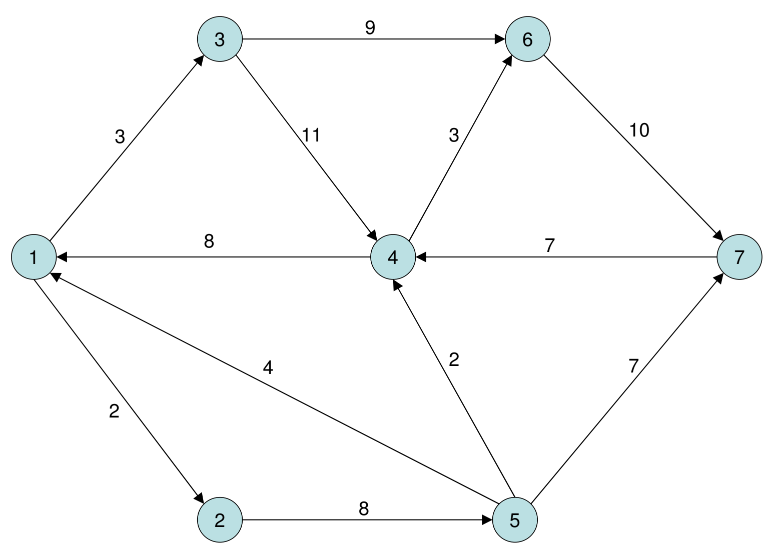
   onde $\sigma(S)$ é o conjunto dos arcos com as duas extremidades em S.

   (a) Argumente por que a resolução deste programa linear resolve o problema de *branching* máximo.

   (b) Escreva o problema de programação linear Dual ao problema acima.

   (c) Partindo da formulação Primal aplique o método Primal-Dual para propor um algoritmo combinatório para o problema de *branching* máximo.

   (d) Exemplifique o seu algoritmo no grafo abaixo.



   Comente cada passo do desenvolvimento do algoritmo acima.