

PUC-Rio
Departamento de Informática
Profs. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
Período: 2007.2
Horário: 2as-feiras e 4as-feiras de 19-21 horas
12 de outubro de 2007

ESTRUTURAS DISCRETAS (INF 1308)

2ª Lista de Exercícios

Procure ser conciso e preciso nas suas argumentações.

GRAFOS

1. O que é um grafo ? Defina um grafo orientado. Defina um grafo não-orientado.
2. Representação de grafos.
 - (a) Explique porque a lista de arestas de um grafo não define completamente o grafo.
 - (b) Defina a **Matriz de Adjacência** de um grafo. Desenhe um grafo não-orientado de 5 vértices e apresente a matriz de adjacência correspondente. Faça o mesmo para um grafo orientado.
 - (c) Defina **Lista de Adjacência** de um vértice. usando os grafos desenhados no item anterior.
 - (d) O que é o grau de um vértice em um grafo. Exemplifique nos grafos do item b).
3. Desenhe todos os grafos não-orientados de 5 vértices onde todos os vértices tem grau menor ou igual a 2 (ou seja, têm duas ou menos arestas incidentes).
4. O que é um caminho em um grafo orientado ? Defina. E em um grafo não-orientado. Defina ciclos (ou circuitos) nos dois tipos de grafos.
5. Considere o problema de se encontrar todos os vértices que cuja distância do vértice 1 é exatamente K (arestas). Ou seja a distância do caminho mais curto, em número de arestas, do vértice até um tal vértice é K .

Teorema 1 (K): *Sabe-se encontrar todos os vértices de $G = (V, E)$ que cuja distância do vértice 1 é exatamente K .*

- (a) Prove este teorema por indução matemática.
- (b) Descreva o algoritmo resultante dessa prova. Como este algoritmo é conhecido na literatura ?

- (c) Mostre como este algoritmo obtém todos os vértices que estão a distância 2 ($K = 2$) no grafo: $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$
6. Considere o grafo do item c) da questão 5.
- Defina um *ciclo Euleriano*.
 - Este grafo possui *ciclo Euleriano* ? Por que ?
 - No caso afirmativo, apresente um ciclo Euleriano.
7. O algoritmo conhecido como *Busca em Profundidade* tem que objetivo quando aplicado a um grafo ? Qual outro algoritmo também cumpre esse objetivo. Aplique o algoritmo de *Busca em Profundidade*, utilizando a ordem lexicográfica para desempates, no grafo do item c) da questão 5 começando pelo vértice 1.
8. Defina caminho-mais-curto entre um par de vértices em um grafo orientado.
9. Seja um grafo orientado $G = (V, A)$ e o problema de encontrar o caminho mais curto entre um vértice
- Escreva o algoritmo de Ford-Bellman para encontrar o caminho-mais-curto de s a todos os demais em V . Observe que este algoritmo pode ser obtido através da prova por indução matemática do teorema abaixo.
- Teorema 2** (K): *Sabe-se obter a distância mínima de s a todos os vértices de V onde os caminhos podem ter no máximo K arcos.*
- Escreva o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho-mais-curto de s a todos os demais em V . Observe que este algoritmo pode ser obtido através da prova por indução matemática do teorema abaixo.
- Teorema 3** (K): *Sabe-se determinar o K -ésimo vértice mais próximo a s e sua respectiva distância mínima de s .*
- Aplique os algoritmos acima no grafo $G = (V, A)$ abaixo fazendo $s = 1$. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$, com distâncias $d_{1,2} = 1$, $d_{1,3} = 2$, $d_{3,5} = 4$, $d_{3,6} = 2$, $d_{3,4} = 2$, $d_{2,4} = 2$, $d_{4,5} = 2$, $d_{4,6} = 3$.
10. Defina uma **árvore** em um grafo. O que é uma **floresta** ? O que é uma **árvore geradora** de um grafo ? Que algoritmo pode ser utilizado para encontrar uma árvore geradora qualquer em um grafo. Aplique este algoritmo no grafo do item c) da questão 5. O que seria uma árvore geradora de peso mínimo ?
11. Seja um grafo conexo $G = (V, E)$, não-orientado, e w_e , para $e \in E$ os pesos, onde $V = \{1, 2, \dots, n\}$ associados às arestas de G . Seja o problema de encontrar a árvore geradora de peso **máximo** de G .
- Escreva o algoritmo pode ser obtido através da prova do teorema abaixo por indução matemática ? Apresente o algoritmo e explique.

Teorema 4 (K): *Sabe-se encontrar uma árvore de $G = (V, E)$, que contém o vértice 1 ($1 \in V$), que possui K vértices e possui peso máximo.*

- (b) Escreva o algoritmo que pode ser obtido através da prova do teorema abaixo por indução matemática? Apresente o algoritmo e explique.

Teorema 5 (K): *Sabe-se encontrar a floresta $F = (V, E^K)$ de peso máximo de $G = (V, E)$ que possui K arestas, isto é $|E^K| = K$.*

- (c) Aplique os algoritmos acima no grafo $G = (V, E)$. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$, com pesos $w_{1,2} = 1, w_{1,3} = 2, w_{3,5} = 4, w_{3,6} = 2, w_{3,4} = 2, w_{2,4} = 2, w_{4,5} = 2, w_{4,6} = 3$.