

ESTRUTURAS DISCRETAS (INF 1308)

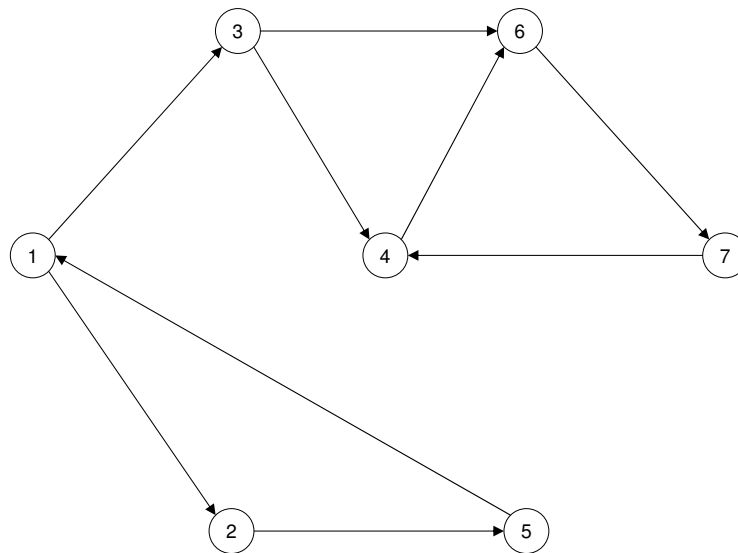
Exercícios 2.2

- Você deve justificar adequadamente todas as suas respostas;
- Os exercícios devem ser entregues escritos à mão;
- A apresentação tem valor preponderante na nota do exercício.

1. Considere um grafo  $G = (V, A)$ , conexo, orientado. Considere também o problema de percorrer os elementos deste grafo. Assuma que o grafo será percorrido a partir de um vértice qualquer. Seja o seguinte teorema:

**Teorema 1** ( $K$ ): *Sabe-se percorrer um grafo  $G' = (V', A')$  onde  $|V'| = K$ , ou seja,  $G'$  possui  $K$  vértices.*

- (a) Prove este teorema por indução FORTE.
- (b) Escreva o algoritmo correspondente à prova no item anterior.
- (c) Mostre como este algoritmo percorre o grafo abaixo começando pelo vértice 1 e decidindo os desempate utilizando a ordem lexicográfica.

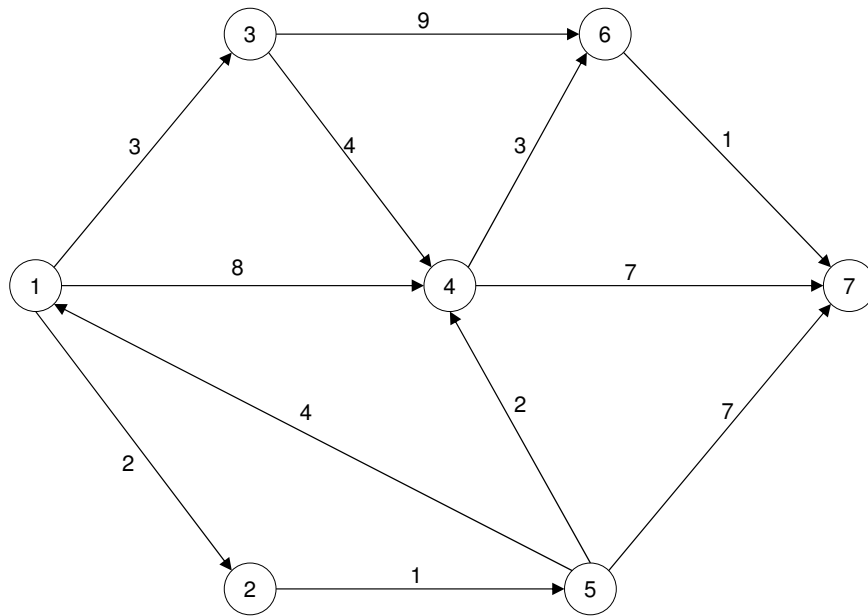


- (d) Modifique este algoritmo para que passe detectar ciclos. Execute o algoritmo resultante no grafo acima.

2. Seja um grafo  $G = (V, A)$ , conexo e orientado, onde as distâncias dos arcos é dada por  $\ell_a \geq 0$ ,  $a \in A$ . Seja também um vértice  $s$ ,  $s \in V$ . Considere agora o problema de encontrar o caminho mais curto do vértice  $s$  aos demais vértices do grafo,  $v \in V - \{s\}$ . Seja o seguinte teorema:

**Teorema 2** ( $K$ ): *Sabe-se determinar a distância  $d^K(v)$  para  $v \in V$  correspondente ao caminho mais curto de  $s$  a  $v$  que utiliza no máximo  $K$  arcos.*

- Prove este teorema por indução matemática SIMPLES (caso base e passo indutivo).
- Mostre como a sua prova descreve uma forma de determinar  $d^K(v)$  para todo  $v$ , para  $K = \dots$ . Qual o maior valor de  $K$  para o qual é necessário determinar  $d^K(v)$ ?
- Escreva o algoritmo que determina o caminho mais curto de  $s$  a  $v$  para todo  $v \in V$ .
- Aplice o seu algoritmo (**faça o “chinês”**) no grafo abaixo.



3. Seja um grafo  $G = (V, A)$ , conexo e orientado, onde as distâncias dos arcos é dada por  $\ell_a \geq 0$ ,  $a \in A$ . Seja também um vértice  $s$ ,  $s \in V$ . Considere agora o problema de encontrar o caminho mais curto do vértice  $s$  aos demais vértices do grafo,  $v \in V - \{s\}$ . Seja o seguinte teorema:

**Teorema 3** ( $K$ ): *Sabe-se determinar o  $K$ -ésimo vértice mais próximo do vértice  $s$ ,  $v_k$ , e a sua respectiva distância de  $s$  até  $v_k$ ,  $d(v_k)$ .*

Observe que um vértice ser o  $K$ -ésimo mais próximo de um vértice  $s$  é uma condição definitiva e permanente.

- Prove este teorema por indução matemática SIMPLES (caso base e passo indutivo).
- Mostre como a sua prova descreve uma forma de determinar  $d(v_k)$  para todo  $v_k$ , para  $K = 1, \dots, n = |V|$ .
- Escreva o algoritmo que determina o caminho mais curto de  $s$  a  $v$  para todo  $v \in V$ .
- Aplice o seu algoritmo (**faça o “chinês”**) no grafo da questão anterior.