PUC-Rio
Departamento de Informática
Prof. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
Período: 2007.1
Horário: 2as. e 4as-feiras de 19 às 21 horas - Sala 460L

ESTRUTURAS DISCRETAS (INF 1308)

3^a Prova

- **Você deve justificar todas as suas respostas**;
- Não é permitida a consulta a livros ou anotações;
- **O plágio ou a tentativa de plágio implicará na nota zero**.

1. (5.0) Sejam duas sequências de inteiros distintos $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ e $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$.
   (a) Utilize indução matemática (com reforço de hipótese) para propor um algoritmo que obtenha a maior subsequência (não necessariamente consecutiva) comum às duas sequências (T e Q).
      i. Qual é o reforço de hipótese utilizado ?
      ii. Explique a recursão resultante (i.e., o algoritmo):
      $$custo(i, j) \quad = \quad \max\{custo(i-1, j), custo(i, j-1), custo(i-1, j-1) + \delta\}$$
      onde δ vale 1 se $t_i = q_j$ e 0 caso contrário.
      iii. Qual o valor dos custos: $custo(0, 0)$, $custo(i, 0)$ para $i = 1, \ldots, n$ e $custo(0, j)$ para $j = 1, \ldots, m$?
   (b) Considere que para cada par de elementos de T e Q, t_i e q_j é associado um custo positivo c_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Proponha um algoritmo para encontrar a subsequência comum onde a soma dos custos dos elementos é maximizada.
      i. O que muda na recursão resultante ? Apresente a nova recursão resultante.
   (c) Mostre como os algoritmos obtidos acima funcionam nas sequências:
   $$3, 7, 9, 2, 3, 6, 2, 8$$
   e
   $$3, 5, 8, 7, 9, 2, 3, 6, 7$$
   Execute o algoritmo do item (b) com os custos $c_{ij} = i + j$.

2. (4.0) Um comerciante possui um armazém que utiliza para suprir seus clientes de um único produto. O seu armazém pode guardar até C unidades do produto. Para as próximas T semanas o comerciante TEM que atender às demandas dos seus clientes que somam d_t para a semana t, onde $t = 1, 2, \ldots, T$. Além disso, ele possui $s_0 (\leq C)$ unidades em estoque antes do início da primeira semana, e já negociou com os fornecedores os preços unitários p_t ($t = 1, 2, \ldots, T$). Ele deseja planejar o atendimento dos seus clientes de modo a gastar o mínimo possível com a compra do produto.

   Ajude ao comerciante a definir a sua estratégia ótima de compra do produto nas semanas $t = 1, \ldots, T$.
   (a) Apresente o algoritmo que obtém a estratégia de compra de menor custo e atende às demandas dos seus clientes.
   (b) Mostre como fica a prova do passo indutivo e sua relação com o algoritmo proposto.
      i. Qual é o reforço de hipótese utilizado ?
      ii. Explique a recursão resultante ? (I.e., o algoritmo)
      $$custo(t, k) \quad = \quad \min_{q=0,\ldots,C \text{ e } k-q+d_t \geq 0} \{custo(t-1, k-q+d_t) + p_t.q\}$$

(c) Execute o seu algoritmo sobre a seguinte instância: $C = 12$, $T = 5$,$s_0 = 3$, $d_1 = 7$, $d_2 = 4$, $d_3 = 15$, $d_4 = 10$, $d_5 = 7$ e $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$, $p_4 = 6$, $p_5 = 8$. Informe quanto o comerciante deve comprar em cada semana e o seu custo total.

3. (3.0) Seja $G = (V, E)$ um grafo **não-orientado**. Deseja-se decidir se G é um grafo bi-partido ou não.

   Um grafo é bi-partido se existe uma partição de V, V_1 e V_2 ($V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$, $V_1 \bigcup V_2 = V$) tal que $\forall\ (u, v) \in E$, tem-se que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou vice-versa. Isto é, não existe aresta entre vértices de V_1 ou V_2.

   Caso G seja bi-partido, deseja-se obter a partição V_1 e V_2 de V.

   Elabore o caso base e a hipótese indutiva para a prova, por indução, de que sabe-se encontrar um tais conjuntos. Descreva o algoritmo resultante da sua prova.