PUC-Rio
Departamento de Informática
Profs. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
Período: 2005.1
Horário: 3as-feiras e 5as-feiras de 15-17
14 de junho de 2005

ESTRUTURAS DISCRETAS (INF 1631)

3^a Lista de Exercícios

Procure ser conciso e preciso nas suas argumentações.

Reforço da Hipótese Indutiva

1. Considere a multiplicação de n matrizes $A_1, \ldots, A_n$. Considere também que denota-se o produto das matrizes $A_k.A_{k+1}.\ldots.A_q$ por $A_{k..q}$ e que as dimensões das matrizes são dadas por $d_k \times d_{k+1}$ para a matriz A_k. Assim, $A_{1..n}$ terá dimensão $d_1 \times d_{n+1}$.

   Aqui a multiplicação de pares consecutivos de matrizes $A_k.A_{k+1}$ é feita calculando

   $$a_{i,j}^{k..k+1} = \sum_{p=1}^{d_{k+1}} a_{i,p}^{k}.a_{p,j}^{k+1}$$

   para todo par (i, j) que é elemento de $A_k.A_{k+1}$ e onde $a_{i,j}^k$ representa o elemento (i, j) da matriz A_k.

   Observe que a multiplicação de 3 matrizes A_1, A_2 e A_3, pode ser feita de duas manieras: $((A_1.A_2).A_3)$ e $(A_1.(A_2.A_3))$. (De quantas maneiras pode-se obter o produto de n matrizes ?)

   Observe também que para cada maneira de se multiplicar n matrizes pode-se ter que realizar um número diferente de multiplicações. Quantas são ?

   Apresente um algoritmo para determinar a maneira de se multiplicar as n matrizes que utiliza o menor número de multiplicações. Mostre que esse algoritmo pode ser obtido por indução matemática e explique qual o reforço da hipótese indutiva que permite provar o passo indutivo que leva ao algoritmo.

2. Considere o problema de encontrar a sub-árvore de uma árvore enraizada no vértice r cujo peso é máximo. A sub-árvore também deverá ser enraizada em r. O problema é definido da seguinte forma: dada uma árvore (é um grafo não-orientado, é claro) $T = (V, E)$, um 'vertice raiz $r \in V$ e pesos w_v associados aos vértices de V, determinar uma árvore $T^* = (V^*, E^*)$, contida em T onde $r \in V^*$ e a soma $\sum_{v \in V^*} w_v$ é máxima.

   A árvore vazia vale zero(0) e, naturalmente, os valores dos pesos podem ser positivos ou negativos. Responda:

(a) Use reforço de hipótese para propor um algoritmo que obtenha uma sub-árvore de peso máximo (nesse caso, o reforço é supor que conhece-se a sub-árvore de peso máximo com raiz em cada um dos vértices filhos, e indução prova que se é verdade para os filhos então é verdade para os pais).

(b) Execute o seu algoritmo sobre a seguinte instância: $r = 1$, $V = \{1, \ldots, 12\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 7), (3, 8), (5, 9), (5, 10), (8, 11), (8, 12)\}$, $w_1 = -2$, $w_2 = -1$, $w_3 = -1$, $w_4 = 4$, $w_5 = -6$, $w_6 = -1$, $w_7 = -1$, $w_8 = 1$, $w_9 = 2$, $w_{10} = 3$, $w_{11} = -2$ e $w_{12} = 3$.

3. Um comerciante possui um armazém que utiliza para suprir seus clientes de um único produto. O seu armazém pode guardar até C unidades do produto. Para as próximas T semanas o comerciante TEM que atender às demandas dos seus clientes que somam d_t para a semana t, onde $t = 1, 2, \ldots, T$. Além disso, ele possui $s_0(\leq C)$ unidades em estoque antes do início da primeira semana, e já negociou com os fornecedores os preços unitários p_t ($t = 1, 2, \ldots, T$). Ele deseja planejar o atendimento dos seus clientes de modo a gastar o mínimo possível com a compra do produto.

   Ajude ao comerciante a definir a sua estratégia ótima de compra do produto nas semanas $t = 1, \ldots, T$.

   (a) Apresente o algoritmo que obtém a estratégia de compra de menor custo e atende às demandas dos seus clientes.

   (b) Explique que reforço da hipótese indutiva deve ser utilizado para se obter um algoritmo eficiente para este cálculo.

   (c) Mostre como fica a prova do passo indutivo e sua relação com o algoritmo proposto.

   (d) Execute o seu algoritmo sobre a seguinte instância: $C = 12$, $T = 5$,$s_0 = 3$, $d_1 = 7$, $d_2 = 4$, $d_3 = 15$, $d_4 = 10$, $d_5 = 7$ e $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$, $p_4 = 6$, $p_5 = 8$. Informe quanto o comerciante deve comprar em cada semana e o seu custo total.

4. Seja uma sequência de n inteiros distintos $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$.

   (a) Utilize indução matemática (com reforço de hipótese) para propor um algoritmo que obenha a maior subsequência crescente (não necessariamente consecutiva).

   (b) Mostre como os algoritmos obtidos acima funcionam na sequência:

$$3, 17, 9, 12, 35, 6, 27, 8, 21, 26, 23, 11, 19, 13, 15$$