PUC-Rio
Departamento de Informática
Profs. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
Período: 2004.2
Horário: 3as-feiras e 5as-feiras de 15-17
14 de novembro de 2004

ESTRUTURAS DISCRETAS (INF 1631)

4^a Lista de Exercícios

Data da Entrega: 6 de dezembro de 2004

Procure ser conciso e preciso nas suas argumentações.

1. Considere o conjunto dos números que podem ser escritos com os dígitos 0, 1, . . ., 9 (base 10), onde todos os dígitos são diferentes. Utilize o princípio da inclusão-exclusão para determinar a cardinalidade deste conjunto.

2. Seja $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ uma sequência de n números distintos.

   (a) Utilize indução matemática (com reforço de hipótese) para propor um algoritmo que obenha a maior subsequência crescente (não necessariamente consecutiva).

   (b) Repita o item anterior para obter a maior subsequência decrescente.

   (c) Considere que para cada elemento de T é associado um custo positivo c_i, $i = 1, \ldots, n$. Proponha um algoritmo para encontrar a subsequência crecente de T onde a soma dos custos dos elementos é maximizada.

   (d) Repita o item anterior para obter a subsequência decrescente com maior peso.

   (e) Aplique os algoritmos obtidos acima na sequência:

   $$3, 17, 9, 12, 35, 6, 27, 8, 21, 26, 23, 11, 19, 13, 15$$

   com os pesos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ e também com os pesos 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

3. Seja u_n o número de *strings* no alfabeto $\{0, 1\}$ que possuem a propriedade de não ter dois zeros consecutivos. Mostre que $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ e $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

4. Mostre que qualquer conjunto de 172 inteiros existe um par cuja diferença é divisível por 171.

5. Mostre que em um grupo de 6 pessoas existe pelo menos um conjunto de 3 pessoas se conhecem mutuamente ou se desconhecem mutuamente. Em seguida, mostre que em um grupo de 10 pessoas existe sempre um conjunto de 4 pessoas que se conecem ou um conjunto de 3 pessoas que se desconhecem mutuamente. Mostre agora que se o conjunto tem 20 pessoas então existe um conjunto de 4 pessoas onde ou todos se conhecem ou todos se desconhecem. Observe que a relação "conhecer" é simétrica.

   Para isso, inicie sempre considerando um pessoa arbitrária em particular e aplicando a generalização do *princípio da casa do pombo generalizado* onde observa-se que se um conjunto de n elementos é particionado em k grupos então pelo menos um subgrupo possui $\lceil n/k \rceil$ elementos. Por exemplo, um grupo de 5 elementos particionado em dois subgrupos implica que existirá um subgrupo com 3 elementos.

   A aplicação recursiva dos resultados obtidos permite provar as afirmações acima.

6. Considere o conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ e um subconjunto X de S. Seja a função $f : X \longrightarrow Y$ onde $f(x)$ é o maior número impar que divide x para $x \in X$. Observe que Y, a imagem de f, necessariamente está contida em $\{1, 3, \ldots, 2n - 1\}$. Argumente que qualquer conjunto X onde $|X| \geq n + 1$ possui dois elemento onde um divide o outro.