PUC-Rio
Departamento de Informática
Profs. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
Período: 2004.2
Horário: 3as-feiras e 5as-feiras de 15-17
14 de novembro de 2004

ESTRUTURAS DISCRETAS (INF 1361)

2^a Lista de Exercícios

Data da Entrega: 1 de dezembro de 2004

Procure ser conciso e preciso nas suas argumentações.

Reforço da Hipótese Indutiva

1. Considere a multiplicação de n matrizes $A_1, \ldots, A_n$. Considere também que denota-se o produto das matrizes $A_k.A_{k+1}.\ldots.A_q$ por $A_{k..q}$ e que as dimensões das matrizes são dadas por $d_k \times d_{k+1}$ para a matriz A_k. Assim, $A_{1..n}$ terá dimensão $d_1 \times d_{n+1}$.

   Aqui a multiplicação de pares consecutivos de matrizes $A_k.A_{k+1}$ é feita calculando

   $$a_{i,j}^{k..k+1} = \sum_{p=1}^{d_{k+1}} a_{i,p}^{k}.a_{p,j}^{k+1}$$

   para todo par (i, j) que é elemento de $A_k.A_{k+1}$ e onde $a_{i,j}^k$ representa o elemento (i, j) da matriz A_k.

   Observe que a multiplicação de 3 matrizes A_1, A_2 e A_3, pode ser feita de duas manieras: $((A_1.A_2).A_3)$ e $(A_1.(A_2.A_3))$. (De quantas maneiras pode-se obter o produto de n matrizes ?)

   Observe também que para cada maneira de se multiplicar n matrizes pode-se ter que realizar um número diferente de multiplicações. Quantas são ?

   Apresente um algoritmo para determinar a maneira de se multiplicar as n matrizes que utiliza o menor número de multiplicações. Mostre que esse algoritmo pode ser obtido por indução matemática e explique qual o reforço da hipótese indutiva que permite provar o passo indutivo que leva ao algoritmo.

2. Um comerciante possui um armazém que utiliza para suprir seus clientes de um único produto. O seu armazém pode guardar até C unidades do produto. Para as próximas T semanas o comerciante TEM que atender às demandas dos seus clientes que somam d_t para a semana t, onde $t = 1, 2, \ldots, T$. Além disso, ele possui $s_0(\leq C)$ unidades em

estoque antes do início da primeira semana, e já negociou com os fornecedores os preços unitários p_t ($t = 1, 2, \ldots, T$). Ele deseja planejar o atendimento dos seus clientes de modo a gastar o mínimo possível com a compra do produto.

Ajude ao comerciante a definir a sua estratégia ótima de compra do produto nas semanas $t = 1, \ldots, T$.

(a) Apresente o algoritmo que obtém a estratégia de compra de menor custo e atende às demandas dos seus clientes.

(b) Explique que reforço da hipótese indutiva deve ser utilizado para se obter um algoritmo eficiente para este cálculo.

(c) Mostre como fica a prova do passo indutivo e sua relação com o algoritmo proposto.

(d) Execute o seu algoritmo sobre a seguinte instância: $C = 12$, $T = 5$,$s_0 = 3$, $d_1 = 7$, $d_2 = 4$, $d_3 = 15$, $d_4 = 10$, $d_5 = 7$ e $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$, $p_4 = 6$, $p_5 = 8$. Informe quanto o comerciante deve comprar em cada semana e o seu custo total.

3. Considere um tabuleiro de xadrez e um rei que está inicialmente na posição $(1, 1)$ (as posições do tabuleiro são representadas por (i, j) onde $1 \leq i \leq 8$ e $1 \leq j \leq 8$). Para cada posição do tabuleiro estão associados um prêmio p_{ij} e um consumo q_{ij} (o prêmio pode ser em USD(!!) e o consumo em litros de gasolina, por exemplo). Os prêmios e os consumos assumem somente valores positivos. O rei tem inicialmente Q unidades para consumir e pode passar quantas vezes quiser em cada posição do tabuleiro e a cada vez receber o prêmio e, naturalmente, consumir os seus recursos. Ao final (do passeio) **o rei tem que estar de volta na posição** $(1, 1)$.

(a) Proponha um algoritmo para determinar o caminho que o rei deve fazer para obter o maior total possível em prêmios. Esse algoritmo pode ser obtido respondendo aos dois próximos itens.

(b) Suponha que você conhece a solução que obtém o maior total em prêmios dado que o rei está em cada uma das posições do tabuleiro e para cada consumo possível. Escreva agora o teorema do passo indutivo explicitando o reforço de hipótese utilizado.

(c) Prove por indução matemática (simples) que você sabe resolver o problema do rei.

(d) Suponha que $Q = 7$ e que $q_{ij} = 1$ e $p_{ij} = 2 * i + 3 * j$ para todo (i, j). Determine o caminho em que o rei acumula o maior total possível de prêmios. Repita o cálculo modificando apenas $p_{22} = 100$ e mantendo os demais valores.