

PUC-Rio  
Departamento de Informática  
Profs. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão  
Período: 2004.2  
Horário: 3as-feiras e 5as-feiras de 15-17  
14 de outubro de 2004

## ESTRUTURAS DISCRETAS (INF 1361)

### 2ª Lista de Exercícios

Data da Entrega: 21 de outubro de 2004

Procure ser conciso e preciso nas suas argumentações.

### GRAFOS

1. O que é um grafo ? Defina um grafo orientado. Defina um grafo não-orientado.
2. Representação de grafos.
  - (a) Explique porque a lista de arestas de um grafo não define completamente o grafo.
  - (b) Defina a **Matriz de Adjacência** de um grafo. Desenhe um grafo não-orientado de 5 vértices e apresente a matriz de adjacência correspondente. Faça o mesmo para um grafo orientado.
  - (c) Defina **Lista de Adjacência** de um vértice. usando os grafos desenhados no item anterior.
  - (d) O que é o grau de um vértice em um grafo. Exemplifique nos grafos do item b).
3. Desenhe todos os grafos não-orientados de 5 vértices onde todos os vértices tem grau menor ou igual a 2 (ou seja, têm duas ou menos arestas incidentes).
4. O que é um caminho em um grafo orientado ? Defina. E em um grafo não-orientado. Defina ciclos (ou circuitos) nos dois tipos de grafos.
5. Considere o problema de se encontrar todos os vértices que cuja distância do vértice 1 é exatamente  $K$  (arestas). Ou seja a distância do caminho mais curto, em número de arestas, do vértice até um tal vértice é  $K$ .

**Teorema 1** ( $K$ ): *Sabe-se encontrar todos os vértices de  $G = (V, E)$  que cuja distância do vértice 1 é exatamente  $K$ .*

- (a) Prove este teorema por indução matemática.

- (b) Descreva o algoritmo resultante dessa prova. Como este algoritmo é conhecido na literatura ?
- (c) Mostre como este algoritmo obtém todos os vértices que estão a distância 2 ( $K = 2$ ) no grafo:  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$
6. Considere o grafo do item c) da questão 5.
- (a) Defina um *ciclo Euleriano*.
- (b) Este grafo possui *ciclo Euleriano* ? Por que ?
- (c) No caso afirmativo, apresente um ciclo Euleriano.
7. O algoritmo conhecido como *Busca em Profundidade* tem que objetivo quando aplicado a um grafo ? Qual outro algoritmo também cumpre esse objetivo. Aplique o algoritmo de *Busca em Profundidade*, utilizando a ordem lexicográfica para desempates, no grafo do item c) da questão 5 começando pelo vértice 1.
8. Defina caminho-mais-curto entre um par de vértices em um grafo orientado.
9. Seja um grafo orientado  $G = (V, A)$  e o problema de encontrar o caminho mais curto entre um vértice
- (a) Escreva o algoritmo de Ford-Bellman para encontrar o caminho-mais-curto de  $s$  a todos os demais em  $V$ . Explique por que este algoritmo pode ser obtido através da prova por indução matemática do teorema abaixo.
- Teorema 2** ( $K$ ): *Sabe-se obter a distância mínima de  $s$  a todos os vértices de  $V$  onde os caminhos podem ter no máximo  $K$  arcos.*
- (b) Escreva o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho-mais-curto de  $s$  a todos os demais em  $V$ . Explique por que este algoritmo pode ser obtido através da prova por indução matemática do teorema abaixo.
- Teorema 3** ( $K$ ): *Sabe-se determinar o  $K$ -ésimo vértice mais próximo a  $s$  e sua respectiva distância mínima de  $s$ .*
- (c) Aplique os algoritmos acima no grafo  $G = (V, A)$  abaixo fazendo  $s = 1$ .  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$ , com distâncias  $d_{1,2} = 1, d_{1,3} = 2, d_{3,5} = 4, d_{3,6} = 2, d_{3,4} = 2, d_{2,4} = 2, d_{4,5} = 2, d_{4,6} = 3$ .
10. Considere o problema de encontrar o caminho mais curto entre todos os pares de vértices de um grafo.
- (a) Explique os algoritmos que podem ser obtidos pela prova por indução matemática dos seguintes teoremas.
- Teorema 4** ( $K$ ): *Sabe-se obter a distância mínima entre todos os pares de vértices em  $V$  onde os caminhos podem ter no máximo  $K$  arcos.*

**Teorema 5** ( $K$ ): Sabe-se obter a distância mínima entre todos os pares de vértices em  $V$  onde os caminhos podem ter como vértices intermediários os vértices que estão no conjunto  $I = \{1, 2, \dots, K\}$ .

O algoritmo resultante da prova deste segundo é frequentemente denominado *Floyd-Warshall*.

- (b) Aplique os algoritmos acima no grafo  $G = (V, A)$  abaixo onde os arcos abaixo ocorrem com as duas orientações possíveis.

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$ , com distâncias  $d_{1,2} = 1$ ,  $d_{1,3} = 2$ ,  $d_{3,5} = 4$ ,  $d_{3,6} = 2$ ,  $d_{3,4} = 2$ ,  $d_{2,4} = 2$ ,  $d_{4,5} = 2$ ,  $d_{4,6} = 3$ .

11. Defina o **Fecho Transitivo** de um grafo  $G = (V, E)$ . Apresente algoritmos para obter o **Fecho Transitivo** dos grafos apresentados nesta lista.
12. Defina uma **árvore** em um grafo. O que é uma **floresta**? O que é uma **árvore geradora** de um grafo? Que algoritmo pode ser utilizado para encontrar uma árvore geradora qualquer em um grafo. Aplique este algoritmo no grafo do item c) da questão 5. O que seria uma árvore geradora de peso mínimo?
13. Seja um grafo conexo  $G = (V, E)$ , não-orientado, e  $w_e$ , para  $e \in E$  os pesos, onde  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  associados às arestas de  $G$ . Seja o problema de encontrar a árvore geradora de peso **máximo** de  $G$ .

- (a) Que algoritmo pode ser obtido através da prova dos teoremas abaixo por indução matemática? Apresente o algoritmo e explique.

**Teorema 6** ( $K$ ): Sabe-se encontrar uma sub-árvore da árvore geradora máxima de  $G = (V, E)$ , que contém o vértice 1 ( $1 \in V$ ), que possui  $K$  vértice e possui peso máximo.

- (b) Que algoritmo pode ser obtido através da prova do teorema abaixo por indução matemática? Apresente o algoritmo e explique.

**Teorema 7** ( $K$ ): Sabe-se encontrar a floresta  $F = (V, E^K)$  de peso máximo de  $G = (V, E)$  que possui  $K$  arestas, isto é  $|E^K| = K$ .

- (c) Aplique os algoritmos acima no grafo  $G = (V, E)$ .  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$ , com pesos  $w_{1,2} = 1$ ,  $w_{1,3} = 2$ ,  $w_{3,5} = 4$ ,  $w_{3,6} = 2$ ,  $w_{3,4} = 2$ ,  $w_{2,4} = 2$ ,  $w_{4,5} = 2$ ,  $w_{4,6} = 3$ .

14. Emparelhamentos(*matching*) e Fluxo em Redes

- (a) Defina um grafo bi-partido.
- (b) O que é um emparelhamento. O que seria um emparelhamento máximo em um grafo  $G = (V, E)$  não orientado.

- (c) Dado um grafo orientado  $G = (V, E)$  com capacidade  $u_e$  associadas aos arcos  $e \in E$ , e vértices de origem  $s$  e destino  $t$ , defina um fluxo viável de  $s$  a  $t$  na rede definida por  $G$ .
- (d) O que seria um fluxo máximo ?
- (e) Que algoritmo pode ser usado para obter o emparelhamento máximo de um grafo bi-partido ?
- (f) Que algoritmo pode ser usado para obter o fluxo máximo de  $s$  a  $t$  em um grafo orientado  $G = (V, E)$  com capacidade  $u_e$  associadas aos arcos ?