PUC-Rio
Departamento de Informática
Profs. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão
Período: 2004.1
Horário: 2as-feiras e 4as-feiras de 19-21 / 21-23 horas
28 de abril de 2004

ESTRUTURAS DISCRETAS (INF 1308)

2^a Lista de Exercícios

Data da Entrega: 17 de maio de 2004

Procure ser conciso e preciso nas suas argumentações.

GRAFOS

1. O que é um grafo ? Defina um grafo orientado. Defina um grafo não-orientado.
2. Representação de grafos.
   (a) Explique porque a lista de arestas de um grafo não define completamente o grafo.
   (b) Defina a **Matriz de Ajacência** de um grafo. Desenhe um grafo não-orientado de 5 vértices e apresente a matriz de adjacência correspondente. Faça o mesmo para um grafo orientado.
   (c) Defina **Lista de Adjacência** de um vértice. usando os grafos desenhados no item anterior.
   (d) O que é o grau de um vértice em um grafo. Exemplifique nos grafos do item b).
3. Desenhe todos os grafos não-orientados de 5 vértices onde todos os vértices tem grau menor ou igual a 2 (ou seja, têm duas ou menos arestas incidentes).
4. O que é um caminho em um grafo orientado ? Defina. E em um grafo não-orientado. Defina ciclos (ou circuitos) nos dois tipos de grafos.
5. Considere o problema de se encontrar todos os vértices que cuja distância do vértice 1 é exatamente K (arestas). Ou seja a distância do caminho mais curto, em número de arestas, do vértice até um tal vértice é K.

   Teorema 1 *(K): Sabe-se encontrar todos os vértices de $G = (V, E)$ que cuja distância do vértice 1 é exatamente K.*

   (a) Prove este teorema por indução matemática.

(b) Descreva o algoritmo resultante dessa prova. Como este algoritmo é conhecido na literatura ?

(c) Mostre como este algoritmo obtém todos os vértices que estão a distância 2 ($K = 2$) no grafo: $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$

6. Considere o grafo do item c) da questão 5.

   (a) Defina um *ciclo Euleriano.*

   (b) Este grafo possui *ciclo Euleriano* ? Por que ?

   (c) No caso afirmativo, apresente um ciclo Euleriano.

7. O algoritmo conhecido como *Busca em Profundidade* tem que objetivo quando aplicado a um grafo ? Qual outro algoritmo também cumpre esse objetivo. Aplique o algoritmo de *Busca em Profundidade*, utilizando a ordem lexicográfica para desempates, no grafo do item c) da questão 5 começando pelo vértice 1.

8. Defina caminho-mais-curto entre um par de vértices em um grafo orientado.

9. Seja um grafo orientado $G = (V, A)$ e o problema de encontrar o caminho mais curto entre um vértice

   (a) Escreva o algoritmo de Ford-Bellman para encontrar o caminho-mais-curto de s a todos os demais em V. Explique por este algoritmo pode ser obtido através da prova por indução matemática do teorema abaixo.

   Teorema 2 *(K): Sabe-se obter a distância mínima de s a todos os vértices de V onde os caminhos podem ter no máximo K arcos.*

   (b) Escreva o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho-mais-curto de s a todos os demais em V. Explique por este algoritmo pode ser obtido através da prova por indução matemática do teorema abaixo.

   Teorema 3 *(K): Sabe-se determinar o K-ésimo vértice mais próximo a s e sua respectiva distância mínima de s.*

   (c) Aplique os algoritmos acima no grafo $G = (V, A)$ abaixo fazendo $s = 1$. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$, com distâncias $d_{1,2} = 1, d_{1,3} = 2$, $d_{3,5} = 4, d_{3,6} = 2, d_{3,4} = 2$, $d_{2,4} = 2, d_{4,5} = 2, d_{4,6} = 3$.

10. Defina uma **árvore** em um grafo. O que é uma **floresta** ? O que é uma **árvore geradora** de um grafo ? Que algoritmo pode ser utilizado para encontrar uma árvore geradora qualquer em um grafo. Aplique este algoritmo no grafo do item c) da questão 5. O que seria uma árvore geradora de peso mínimo ?

11. Seja um grafo conexo $G = (V, E)$, não-orientado, e w_e, para $e \in E$ os pesos, onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ associados às arestas de G. Seja o problema de encontrar a árvore geradora de peso **máximo** de G.

(a) Que algoritmo pode ser obtido através da prova do teorema abaixo por indução matemática ? Apresente o algoritmo e explique.

Teorema 4 *(K): Sabe-se encontrar uma árvore de $G = (V, E)$, que contém o vértice 1 ($1 \in V$), que possui K vértice e possui peso máximo.*

(b) Que algoritmo pode ser obtido através da prova do teorema abaixo por indução matemática ? Apresente o algoritmo e explique.

Teorema 5 *(K): Sabe-se encontrar a floresta $F = (V, E^K)$ de peso máximo de $G = (V, E)$ que possui K arestas, isto é $|E^K| = K$.*

(c) Aplique os algoritmos acima no grafo $G = (V, E)$. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 4), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$, com pesos $w_{1,2} = 1, w_{1,3} = 2$, $w_{3,5} = 4, w_{3,6} = 2, w_{3,4} = 2$, $w_{2,4} = 2, w_{4,5} = 2, w_{4,6} = 3$.