

## ESTRUTURAS DISCRETAS (INF 1631)

## 1ª Lista de Exercícios

1. Explique o que são as técnicas de prova direta, por força bruta, por contradição. Dê um exemplo de cada. Esta técnica pode ser usada para uma prova por indução? Como e onde? O que é contra-positivo.

2. Prove por indução

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}k(k+1)/2$$

3. Sejam  $a$ ,  $b$  e  $n$  inteiros positivos. Prove por indução que:

$$2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n$$

4. Dado um conjunto  $S$  de  $n+1$  números tirados do conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ . Prove por indução que sempre existe um par de números em  $S$  onde um dos números deste par é divisível pelo outro.

5. Prove por indução que um número é divisível por 3 se e somente se a soma dos dígitos da sua representação decimal é divisível por 3.

6. Escreva um algoritmo recursivo para calcular o *mdc* entre dois números pelo método de Euclides (pg. 124, Maurer e Ralston). Escreva o teorema de que sabe-se encontrar o *mdc* de dois números, prove por indução (forte) e mostre como pode-se obter o algoritmo de Euclides desta prova.

7. Seja  $F(n)$  o  $n$ -ésimo número de Fibonacci, que é definido pela seguinte recursão:  $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$  para  $n > 2$ , sendo  $F(1)=F(2)=1$ . Prove por indução que:

$$F(n)^2 + F(n+1)^2 = F(2n+1)$$

8. Dado  $U \subseteq M = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $|U| = n$ , propor um algoritmo para encontrar todos os conjuntos de triplas  $\{u, v, w\} \subseteq U$  onde  $u + v + w = C$ , para os valores possíveis de  $C$ . Quando pode-se garantir que para  $n$  e  $m$  dados existe sempre pelo menos um destes conjuntos com mais de um elemento?

9. Prove por indução que dado um mapa planar onde todos os vértices têm grau par (grau é o número de arestas que incide no vértice), este pode ter suas regiões coloridas (sem que duas regiões que compartilhem uma aresta, i.e. sejam adjacentes, tenham a mesma cor) com 2 cores.